

不可压 N-S 方程数值方法笔记

Shun Li

May 05, 2025

目录

第一章 概述	3
1.1 不可压 N-S 方程	3
1.2 常见算法	4
1.2.1 非原始变量法	4
1.2.2 原始变量法	4
1.3 空间离散——交错网格	6
1.4 流固耦合	6
第二章 涡量流函数法	8
2.1 涡量和流函数	8
2.2 涡量流函数方程组	8
2.3 算法流程	9
第三章 人工压缩性方法 (ACM)	10
3.1 人工压缩性方程	10
3.2 计算流程	10
3.2.1 定常问题	10
3.2.2 非定常问题	11
第四章 MAC 方法	12
4.1 求解压力 Poisson 方程算法	12
4.2 MAC 方法	12
4.3 计算流程	13
第五章 投影法	15
5.1 Helmholtz 分解定理	15
5.2 投影法简介	15
5.2.1 无压力增量投影法	15
5.2.2 压力增量投影法	16
5.2.3 旋度型压力增量投影法	17
第六章 SIMPLE 算法	18
6.1 SIMPLE 算法介绍	18
6.2 计算流程	19
6.2.1 定常流	19

6.2.2 非定常流	20
6.3 其他	20
第七章 ALE 方法	21
7.1 不可压 N-S 方程	21
7.2 ALE 描述的 N-S 方程	21
7.3 ALE 推出欧拉描述	22
7.4 ALE 推出拉格朗日描述	24
7.5 N-S 方程全离散	24
7.6 小结	25

第一章 概述

1.1 不可压 N-S 方程

无量纲化的不可压 N-S 方程组如下：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

下文将不可压 N-S 方程组简写为 INSE。与可压缩流动相比，不可压缩流动有如下特点：

1. INSE 的压强：只出现在动量方程中，从数学上只是起到了一个 Lagrange 乘子的作用，失去了热力学意义；
2. INSE 不含压强的时间导数项 p_t ，压强 p 的显式计算比较困难，往往需要求解一个全局的 Poisson 方程；
3. 从数学上，方程组呈现抛物-椭圆型的特点，而非可压缩情形的双曲型；
4. 从物理意义上，不可压缩条件意味着声速无穷大，在一点的扰动会瞬间传遍整个区域，从而边界的小误差也会造成很大的影响。

对于不可压方程的处理中，对流项和扩散项分别发挥着不同的角色：

1. 在高雷诺数时，对流占优，扩散项的影响通常较小（除了边界层等区域）；（双曲型）
2. 在低雷诺数时，扩散占优，此时为了避免时间步长过小，对扩散项的离散必须使用隐式。（抛物-椭圆型）

在雷诺数极小或较小的定常流情形下，不可压流体还有如下的简化模型：

1. Stokes 方程组：

$$-\nu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

2. Oseen 方程组：（速度 $\mathbf{w}$ 已知）

$$-\nu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

1.2 常见算法

对于 INSE 的求解，可以分成两类算法：

1. 耦合式算法 (coupled method): 所有变量联立求解，方法直观，但是离散得到的代数方程组具有很强的刚性，计算效率低；
2. 分离式算法 (segregated method): 逐个变量进行求解。

从求解变量的角度，算法又可以分成如下两类：

1. 原始变量法：求解变量为速度 $\mathbf{u}$ 和压强 p ，它们具有明确的物理含义，边界处理较容易；
2. 非原始变量法：求解变量为导出变量，如使用导出变量流函数 φ 和涡量 w ，对应为涡量一流函数方法，还有流函数方法、涡量-速度方法等。它们面临的方程组形式上比原始方程组更容易处理，但是导出变量的边界处理更加困难。

1.2.1 非原始变量法

涡量-流函数方法

通过变量代换，可以把二维不可压缩 N-S 方程组变换为关于涡量和流函数的方程组，进而求解。

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}w) &= \frac{1}{Re} \nabla^2 w \\ \nabla^2 \varphi &= w\end{aligned}$$

其中速度 $\mathbf{u} = (u, v)^T$ 和流函数 φ ，涡量 w 的关系为：

$$u = \varphi_y, \quad v = -\varphi_x, \quad w = u_y - v_x$$

详细内容见后续笔记。

对于涡量一流函数方法为代表的非原始变量法，优缺点都非常明显：

1. 优点：消去了压强项，不可压缩条件自动成立，对方程组的处理更加容易；
2. 缺点：导出变量的边界条件难以确定，不易从二维推广到三维。

1.2.2 原始变量法

常见的使用原始变量的分离式算法包括以下几大类：

1. 人工压缩性方法 (ACM)
2. 求解压力 Poisson 方程算法
 - (a) MAC 方法
 - (b) 投影法
3. 压力修正算法
 - (a) SIMPLE 算法

下文是对几个主流算法的简要介绍。

人工压缩性方法 (ACM)

将连续性方程替换为下式进行求解

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

对于定常流的求解，在时间推进到收敛时，压强场不变，速度场仍然处处满足 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ；对于非定常流的求解，则需要加入内迭代，计算效率低，详细内容见后续笔记。

投影法

最早的无压力增量投影法如下，引入预测速度 $\mathbf{u}^*$ ，将动量方程拆分为两个式子

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \left[(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n \right] &= 0 \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} &= -\nabla p^{n+1} \end{aligned}$$

对第二个式子取散度得到

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*$$

计算流程即：

1. 通过 (1) 式计算 $\mathbf{u}^*$ ；
2. 通过 (2) 式计算 p^{n+1} ；
3. 通过 (3) 式计算 $\mathbf{u}^{n+1}$ 。

最后一步相当于把 $\mathbf{u}^*$ 向散度为零的子空间做投影得到 $\mathbf{u}^{n+1} = P(\mathbf{u}^*)$ ，这也是此类方法称为投影法的原因。后续的改进包括考虑压力增量，以及速度的旋度的修正，引入中间层等，详细内容见后续笔记。

SIMPLE 算法

SIMPLE 算法全称是压力耦合方程组的半隐式方法 (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations)，是一种经典的压力修正算法。SIMPLE 算法在商业软件 Fluent 中被广泛使用，在 Fluent 中默认提供了四种算法选择，包括三种分离式算法和一种耦合式算法：

1. SIMPLE 算法
2. SIMPLEC 算法
3. PISO 算法
4. Coupled 算法 (耦合式算法)

其中 SIMPLEC 和 PISO 都是基于 SIMPLE 算法进行的改进。Fluent 建议，在非定常流动（瞬态流动）问题中选择 PISO 算法，在定常流动问题中选择 SIMPLE 或 SIMPLEC 算法；在高速可压缩流动中使用耦合式算法。

SIMPLE 算法对每一步计算速度和压强都使用了预测值和修正值，一个粗略的计算流程如下：

1. 假设我们已有速度 $\mathbf{u}^n$ ，取一个合适的预测压强 p^* （例如直接取 $p^* = p^n$ ）

2. 基于预测压强 p^* ，利用下式隐式求解 $\mathbf{u}^*$ ：（离散后是关于 $\mathbf{u}^*$ 的非线性方程组）

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u})^* + \nabla p^* = 0$$

3. 基于预测速度 $\mathbf{u}^*$ ，利用下式求解修正压强 p' ：（离散后是关于 p' 的线性方程组）

$$\nabla^2 p' = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*$$

4. 更新速度 $\mathbf{u}^{n+1}$ 和压强 p^{n+1}

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \mathbf{u}' = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p'$$

$$p^{n+1} = p^* + p'$$

另见后续笔记。

1.3 空间离散——交错网格

在使用有限差分 / 有限体积法的空间离散中，往往会采用交错网格来避免压力场的奇偶失联：因为在通常的均匀矩形网格中，对压强使用中心差分，如下高度振荡的压强场，压强梯度的计算却全都是零：

$$P_{IJ} = \begin{cases} P_1 & I+J \text{ 为奇数} \\ P_2 & I+J \text{ 为偶数} \end{cases}$$

这就是奇偶失联现象，交错网格的设置可以有效解决这一问题：对于有限差分法，把标量（压强，温度等）定义在整格点例如 (I, J) ，把速度向量的 u 分量定义在水平方向的半格点例如 $(I + 1/2, J)$ ，把 v 分量定义在竖直方向的半格点例如 $(I, J + 1/2)$ 。对于有限体积法把相应的控制体定义为以上述整格点或半格点为中心的矩形，如图 1.1。

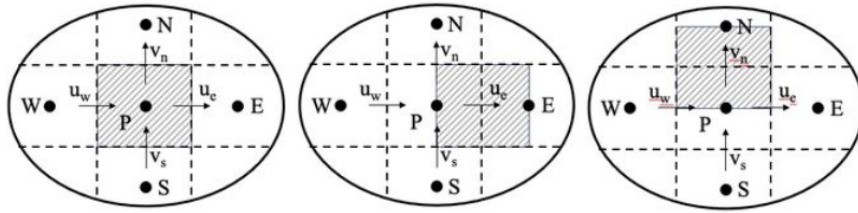


图 1.1: 交错网格

1.4 流固耦合

简单记录一下流固耦合算法的分类：

- 统一型
- 分离型：流体和固体分开求解
 - 弱耦合：速度 $\rightarrow$ 流体/应力 $\rightarrow$ 固体（密度比过大时存在 added mass 效应，使得数值求解不稳定）

– 强耦合：通过迭代使界面条件准确满足

界面处理方法大致分为

- 贴体网络：任意拉格朗日欧拉法（ALE）
- 非贴体网络：例如浸入边界法（IBM）

第二章 涡量流函数法

通过把原始变量（速度，压强）转化为导出变量（涡量，流函数）的方程组，可以避免处理压强时的困难，称为涡量流函数方法。

2.1 涡量和流函数

对于二维的流动，记速度 $\mathbf{u} = (u, v)^T$ ，则涡量 w 只是一个标量，定义为

$$w = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

对于不可压缩流动，有流函数 φ ，满足：

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Remark. 有的材料使用的流函数定义相比上文差一个负号，这不影响算法的本质。

流函数的存在性其实就直接保证了不可压缩条件的成立：

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0$$

流函数的等值线就是流线，亦即流体的速度场 (u, v) 与流函数的梯度场 (φ_x, φ_y) 处处垂直。流函数和涡量满足如下关系：

$$w = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \nabla^2 \varphi$$

2.2 涡量流函数方程组

从无量纲化的二维不可压缩方程组出发

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

连续性方程直接被流函数 φ 的存在性取代，对动量方程按照分量形式有：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + uu_x + vv_x &= -p_x + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + uv_x + vv_y &= -p_y + \frac{1}{Re} \nabla^2 v \end{aligned}$$

分别对 y 求导，对 x 求导，相减得到涡量方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} + uw_x + vw_y = \frac{1}{Re} \nabla^2 w$$

压强消失了，不可压缩条件也消失了，得到如下方程组：

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} + uw_x + vw_y &= \frac{1}{Re} \nabla^2 w \\ w &= \nabla^2 \varphi\end{aligned}$$

2.3 算法流程

对于得到的涡量流函数方程组，在不考虑边界的情况下，计算流程是容易的，例如可以使用如下流程进行计算：

1. 已知 w^n, φ^n ，通过 $u = \varphi_y, v = -\varphi_x$ 得到速度 u^n, v^n ；
2. 通过涡量方程计算得到 w^{n+1} ；
3. 代入 $\nabla^2 \varphi^{n+1} = w^{n+1}$ ，计算新时刻的流函数 φ^{n+1} ；

如果需要计算压强，可以利用动量方程的分量形式，依次对 x 求导，对 y 求导，相加得

$$\nabla^2 p = -[(u_x)^2 + 2u_y v_x + (v_y)^2] = 2[u_x v_y - u_y v_x]$$

上述涡量一流函数方法的优缺点都非常明显：

1. 优点：消去了压强项，消去了不可压缩条件，对方程组的处理更加容易；
2. 缺点：涡量 w 的边界条件难以确定，不易从二维推广到三维。

第三章 人工压缩性方法 (ACM)

人工压缩性方法 (ACM)，主要用于求解不可压缩定常流问题。

3.1 人工压缩性方程

考虑无量纲化的二维不可压缩方程组

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0\end{aligned}$$

由于缺少 $\frac{\partial p}{\partial t}$ ，难以计算压强，因此引入人工压缩性因子 $\beta > 0$ ，使得连续性方程替换为人工压缩性方程：

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \beta \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

这里的人工压缩性因子 β 相当于声速的平方 c^2 ，也可以从物理的角度进行理解，在 $\beta > 0$ 时：

1. 当流动在一点处压缩时， $\nabla \cdot \mathbf{u} < 0$ ，该点的压力会升高， $\frac{\partial p}{\partial t} > 0$ ；
2. 当流动在一点处膨胀时， $\nabla \cdot \mathbf{u} > 0$ ，该点的压力会降低， $\frac{\partial p}{\partial t} < 0$ 。

从而得到方程组

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \beta \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0\end{aligned}$$

这个方程组只有在达到定常态的时候，才满足 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ，因此适合求解定常流问题。增大 β 可以使得压力的收敛更快，但是会增加方程的刚性，降低时间步长。

3.2 计算流程

3.2.1 定常问题

对于定常问题，我们不关心中间过程的计算精度，只需要迭代（时间推进）到满足收敛的判断条件，例如取定足够小的 $\varepsilon > 0$ ，要求

$$\max(\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|, \|p^{n+1} - p^n\|) \leq \varepsilon$$

最终达到稳态，同时满足了不可压缩条件 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 。

3.2.2 非定常问题

对于非定常问题，在时间推进之间，需要加入内迭代，计算效率较低，通常不建议使用 ACM 计算非定常问题。例如对物理时间作一阶离散，对流和扩散项取旧时间层，目标方程为：

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n = -\nabla p^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$$

引入伪时间步长 $\Delta\tau > 0$ 和参数 $\beta > 0$ ，可以通过如下双时间迭代求解：

1. 从 t^n 时刻的第 n 步 $\mathbf{u}^n$ 出发，

2. 进入内迭代：

(a) 记 $\mathbf{u}^{n+1,0} = \mathbf{u}^n$ ，记 $p^{n+1,0} = p^n$ ，(或者压强以一个猜测值开始迭代，应该也可以)

(b) 计算 $\mathbf{u}^{n+1,k}, \dots$ ，以及 $p^{n+1,k}, \dots$ 满足下式

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1,k+1} - \mathbf{u}^{n+1,k}}{\Delta\tau} + \frac{\mathbf{u}^{n+1,k+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n = -\nabla p^{n+1,k} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n$$

$$\frac{p^{n+1,k+1} - p^{n+1,k}}{\Delta\tau} + \beta \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1,k+1} = 0$$

(c) 不断迭代，直到动量方程残量和速度散度均满足给定容差，记作 $\mathbf{u}^{n+1,k_n}, p^{n+1,k_n}$ 。

3. 将内收敛得到的速度和压强作为 t^{n+1} 时刻的速度和压强， $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1,k_n}$ ， $p^{n+1} = p^{n+1,k_n}$ 。

Remark. 内迭代收敛时，伪时间差分项趋于零，但物理时间项 $(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)/\Delta t$ 必须保留。不能用相邻内迭代速度之差替代物理时间差分，否则收敛后会丢失非定常项。伪时间步长与 β 应按空间离散的稳定性限制选取；物理时间步长还需满足显式对流、扩散项的稳定性要求。

第四章 MAC 方法

标记网格法 (Marker-and-Cell method, MAC), 是一种求解压力 Poisson 方程算法, 最初被设计用于求解含自由面的不可压缩流动, 下文的算法并不涉及自由面, 只是关注对不可压缩条件的处理。

4.1 求解压力 Poisson 方程算法

求解压力 Poisson 方程算法是一大类 N-S 方程的求解算法, 它的特点是: 通过求解一个 Poisson 方程获取压强 p , 并且使得速度散度为零间接地得到满足。(张德良, 计算流体力学教程)

考虑无量纲化的二维不可压缩方程组

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0\end{aligned}$$

记 $D = \nabla \cdot \mathbf{u}$, 对动量方程求散度, 得到

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \right] = -\nabla^2 p$$

其中记 S_p 如下

$$S_p = -\nabla \cdot \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \right]$$

从而压强满足

$$\nabla^2 p = S_p - D_t$$

通过如上的 Poisson 方程求解 p , 就是此类方法的主要特点。求解压力 Poisson 方程算法主要包括以下几种:

1. MAC 方法, SOLA 方法 (相当于 MAC 方法的迎风版)
2. 投影法 (又称为时间分裂法, 分步法)

本文中我们主要介绍 MAC 方法, 但是严格来说, 投影法也属于求解压力 Poisson 方程算法的一种, 并且和 MAC 方法相似。

4.2 MAC 方法

MAC 方法又称为标记网格法 (Marker-and-Cell method), 在求解自由面的不可压缩流动时, 使用了 Euler-Lagrange 混合方法, 下文没有涉及自由面, 因此没有体现这一特点。MAC 方法是最早提出使用交错网格的方法, SIMPLE 算法的设计受到了它的启发。

考虑无量纲化的二维不可压缩方程组

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0\end{aligned}$$

首先, 时间离散得到下式

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \right]^n &= -\nabla p^{n+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= 0\end{aligned}$$

直接对动量方程取散度, 得到

$$\frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} - \nabla \cdot \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \nabla \cdot \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \right]^n = -\nabla^2 p^{n+1}$$

这里对两个时间层的速度散度, 记 $D^n = \nabla \cdot \mathbf{u}^n$, 同理 D^{n+1} , 那么

1. $D^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ 是方程组的要求, 强制成立, 因此直接消去;
2. $D^n = \nabla \cdot \mathbf{u}^n$ 是上一步的求解结果, 在求解中不能严格成立, 因此我们允许这种余量的存在, 并体现在下一步计算压强的过程中。

4.3 计算流程

一个粗略的计算流程如下:

1. 已知第 n 步的速度 $\mathbf{u}^n$;
2. 代入下式, 计算第 $n+1$ 步的压强 p^{n+1}

$$-\frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \nabla \cdot \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \right]^n = -\nabla^2 p^{n+1}$$

3. 代入下式, 计算第 $n+1$ 步的速度 $\mathbf{u}^{n+1}$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \right]^n = -\nabla p^{n+1}$$

若离散散度、梯度和 Poisson 算子相容, 并且压力方程被精确求解, 上述流程可保证离散散度为零。实际采用迭代求解器时会有残量, 因此可以使用 $\max |D^{n+1}| \leq \varepsilon$ 作为内迭代终止的判断条件。压力方程可以使用 G-S、SOR 等迭代法求解, 有以下几种典型的计算过程。

第一种计算流程:

1. 已有第 n 步的速度场 $\mathbf{u}^n$;
2. 进入求解内迭代:

(a) 取 $\mathbf{u}^{n+1,0} = \mathbf{u}^n$, 取 $p^{n+1,0} = p^n$

(b) 保持泊松方程右端由 $\mathbf{u}^n$ 确定, 以 $p^{n+1,k}$ 为初值作 G-S 迭代, 得到 $p^{n+1,k+1}$;

$$-\frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \nabla \cdot \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \right]^n = -\nabla^2 p^{n+1,k+1}$$

(c) 利用动量方程, 基于 $p^{n+1,k+1}$ 计算 $\mathbf{u}^{n+1,k+1}$;

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1,k+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \right]^n = -\nabla p^{n+1,k+1}$$

(d) 计算 $D^{n+1,k+1} = \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1,k+1}$, 判断 $\max |D^{n+1,k+1}| \leq \varepsilon$ 是否成立?

(e) 假设 $k = k_N$ 时满足, 退出内迭代;

3. 取 $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1,k_N}$, $p^{n+1} = p^{n+1,k_N}$ 。

第二种计算流程 (Chorin 迭代法): 不使用 Poisson 方程进行迭代法求解, 而是对压强进行直接的修正。

1. 已有第 n 步的速度场 $\mathbf{u}^n$;

2. 进入求解内迭代:

(a) 取 $\mathbf{u}^{n+1,0} = \mathbf{u}^n$, 取 $p^{n+1,0} = p^n$

(b) 计算 $D^{n+1,k} = \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1,k}$, 通过 $p^{n+1,k}$ 直接计算 $p^{n+1,k+1}$, 其中 λ 是可选的松弛因子;

$$p^{n+1,k+1} = p^{n+1,k} - \lambda D^{n+1,k}$$

(c) 利用动量方程, 基于 $p^{n+1,k+1}$ 计算 $\mathbf{u}^{n+1,k+1}$;

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1,k+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \right]^n = -\nabla p^{n+1,k+1}$$

(d) 计算 $D^{n+1,k+1} = \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1,k+1}$, 判断 $\max |D^{n+1,k+1}| \leq \varepsilon$ 是否成立?

(e) 假设 $k = k_N$ 时满足, 退出内迭代;

3. 取 $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1,k_N}$, $p^{n+1} = p^{n+1,k_N}$ 。

对二维均匀网格的标准五点 Laplace 离散, 散度误差的迭代为 $D^{k+1} = (I + \lambda \Delta t \Delta_h) D^k$ 。为使非零频率误差衰减, 可采用充分条件

$$0 < \lambda < \lambda_{\max} = \frac{1}{2\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)}$$

例如可以取 $\lambda = \frac{1}{2} \lambda_{\max}$ 。

第五章 投影法

投影法也称为时间分裂法，分步法，按照思路可以分为两类：

1. 基于 N-S 方程组的半离散格式，基于 Helmholtz 分解定理；
2. 基于 N-S 方程组的全离散格式，采用近似算子分裂/近似矩阵分裂。

下文只包括第一类投影法。

5.1 Helmholtz 分解定理

对于任意光滑的向量场 V 可以唯一分解为一个无源场 V^d 和一个无旋场 $\nabla\phi$ 之和。

$$V = V^d + \nabla\phi$$

满足 $\nabla \cdot V^d = 0$, 和 $\nabla \times \nabla\phi = 0$ 。

Remark. 这一说法是不严谨的，因为唯一性需要向量场满足一定的边界条件，这里暂时略过边界。

5.2 投影法简介

考虑无量纲化的二维不可压缩方程组

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0\end{aligned}$$

5.2.1 无压力增量投影法

我们介绍最早由 Chorin 和 Temam 提出的投影法，利用显式欧拉离散得到：

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \left[(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n \right] &= -\nabla p^{n+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= 0\end{aligned}$$

在其中引入预测速度 $\mathbf{u}^*$ ，把动量方程拆成两个部分：

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \left[(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n \right] &= 0 \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} &= -\nabla p^{n+1}\end{aligned}$$

对第二个式子取散度，得到

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*$$

因此，得到计算流程如下：

1. 从 t^n 时刻的第 n 步 $\mathbf{u}^n$ 出发,
2. 基于 $\mathbf{u}^n$, 计算预测速度 $\mathbf{u}^*$ 满足

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \left[(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n \right] = 0$$

3. 基于 $\mathbf{u}^*$, 计算压强 p^{n+1} 满足

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*$$

4. 得到第 $n+1$ 步的速度 $\mathbf{u}^{n+1}$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p^{n+1}$$

最后一步体现了 Helmholtz 分解定理和投影:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t \nabla p^{n+1}$$

1. 在利用 $\mathbf{u}^n$ 计算预测速度 $\mathbf{u}^*$ 时, 直接忽视了压强场的约束作用;
2. 预测速度 $\mathbf{u}^*$ 根据 Helmholtz 分解定理被分解成无源场 $\mathbf{u}^{n+1}$ 和无旋场 $\Delta t \nabla p^{n+1}$;
3. 通过预测速度 $\mathbf{u}^*$ 和压强 p^{n+1} 计算 $\mathbf{u}^{n+1}$ 就是通过压强的约束作用, 把速度重新投影到散度为零的子空间内: $\mathbf{u}^{n+1} = P(\mathbf{u}^*)$, 最终的速度严格满足 $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ 。

这种最早的投影法通常称作无压力增量投影法: 因为计算中间层的预测速度 $\mathbf{u}^*$ 时, 没有考虑压强梯度的影响。可以改成隐式的时间离散格式, 可以在计算预测速度时考虑压强的影响, 因此精度有限。有一系列衍生的投影法。

注意, 实践中可能不是直接离散 $\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*$, 而是离散下面两个式子, 把离散后的结果进行合并:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} &= -\nabla p^{n+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

这样可以保证离散的 $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ 严格成立。

5.2.2 压力增量投影法

首先, 时间上不使用显式 Euler, 而改用二阶向后差分格式

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{n+1}}{\partial t} \approx \frac{3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t}$$

动量方程离散为

$$\frac{3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} + (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} = -\nabla p^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1}$$

(不等价地) 拆为下面两个式子

$$\begin{aligned} \frac{3\mathbf{u}^* - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* &= -\nabla p^n + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^* \\ \frac{3(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*)}{2\Delta t} &= -\nabla(p^{n+1} - p^n) \end{aligned}$$

1. 第一步, 预测步计算中间速度 $\mathbf{u}^*$, 考虑压强梯度的影响 (需要隐式求解 $\mathbf{u}^*$)

$$\frac{3\mathbf{u}^* - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla)\mathbf{u}^* = -\nabla p^n + \frac{1}{Re}\nabla^2\mathbf{u}^*$$

2. 第二步, 求解压强增量 $q = p^{n+1} - p^n$, 对第二个式子求散度得

$$\nabla^2 q = \frac{3}{2\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*$$

3. 第三步, 更新 $\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^* - \frac{2\Delta t}{3} \nabla q \\ p^{n+1} &= p^n + q\end{aligned}$$

5.2.3 旋度型压力增量投影法

1. 第一步, 预测步, 计算中间速度 $\mathbf{u}^*$, 考虑压强梯度的影响 (需要隐式求解 $\mathbf{u}^*$)

$$\frac{3\mathbf{u}^* - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla)\mathbf{u}^* = -\nabla p^n + \frac{1}{Re}\nabla^2\mathbf{u}^*$$

2. 第二步, 从求解压强增量 $q = p^{n+1} - p^n$ 变成求解新的变量 ϕ

$$\phi = p^{n+1} - p^n + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \mathbf{u}^*$$

满足如下方程组

$$\nabla^2 \phi = \frac{3}{2\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*$$

3. 第三步, 更新 $\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^* - \frac{2\Delta t}{3} \nabla \phi \\ p^{n+1} &= p^n + \phi - \frac{1}{Re} \nabla \cdot \mathbf{u}^*\end{aligned}$$

这一种和压力增量型投影法相比, 略有不同, 可以视作对压力增量型投影方法的改进, 因为如果不可压方程组对速度有第一类边界条件时, 对 ϕ 的求解比对 q 的求解可以给出更合理的边界条件, 略。

第六章 SIMPLE 算法

SIMPLE 算法全称是压力耦合方程组的半隐式方法 (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations), 作为经典的压力修正算法在 Fluent 等工业软件中被广泛应用。

6.1 SIMPLE 算法介绍

考虑无量纲化的二维不可压缩方程组

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

现在我们已有 $\mathbf{u}^n$, 希望下一步的 $\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}$ 满足

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u})^{n+1} + \nabla p^{n+1} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$$

我们把动量方程（不等价地）拆成两部分

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u})^* + \nabla p^* = 0$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} + \nabla(p^{n+1} - p^*) = 0$$

其中记 $p^{n+1} = p^* + p'$, p^* 是预测压强, p' 是修正压强; 记 $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \mathbf{u}'$, $\mathbf{u}^*$ 是预测速度, $\mathbf{u}'$ 是修正速度。这里的过程与投影法相似, 但是投影法只使用了预测速度, SIMPLE 算法同时使用了预测速度和预测压强。不过预测压强通常直接取为上一时刻的压强, 因此修正压强实际就是压强增量。第二个式子可以写成

$$\frac{\mathbf{u}'}{\Delta t} + \nabla p' = 0$$

可以理解为: 在修正速度的计算中, 只考虑了当前位置压强的影响, 没有考虑相邻单元相互之间的影响, 这是 SIMPLE 算法的假设, 也是它的一大特点。假设我们先给出了预测压强 p^* , 可以通过下式计算预测速度 $\mathbf{u}^*$

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u})^* + \nabla p^* = 0$$

这里对 $\mathbf{u}^*$ 的求解仍然是隐式的, 甚至关于 $\mathbf{u}^*$ 不是线性的, 离散化后得到的问题可以使用迭代法求解直到收敛, 对于定常流问题, 由于时间推进是无意义的, 在这里的求解中也可以不用迭代至收敛, 只需要保证最终迭代的解是足够准确的即可。由于 $\mathbf{u}^{n+1}$ 满足连续性方程, 因此有

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \nabla \cdot (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}') = \nabla \cdot \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla^2 p'$$

其中使用了 $\frac{\mathbf{u}'}{\Delta t} + \nabla p' = 0$ 进行代换, 得到修正压强需要满足的 Poisson 方程

$$\nabla^2 p' = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*$$

这里离散化后得到关于 p' 的线性方程组的求解问题, 也可以使用迭代法求解直到收敛, 对于定常流问题, 同样地, 可以不用迭代至收敛, 只需要保证最终迭代的解是足够准确的即可。最终得到新一步的速度和压强

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^* + \mathbf{u}' = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p' \\ p^{n+1} &= p^* + p'\end{aligned}$$

6.2 计算流程

一个粗略的计算流程如下:

1. 假设我们已有速度 $\mathbf{u}^n$, 取一个合适的预测压强 p^* (例如直接取 $p^* = p^n$)
2. 基于预测压强 p^* , 利用下式隐式求解 $\mathbf{u}^*$: (离散后是关于 $\mathbf{u}^*$ 的非线性方程组)

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u})^* + \nabla p^* = 0$$

3. 基于预测速度 $\mathbf{u}^*$, 利用下式求解 p' : (离散后是关于 p' 的线性方程组)

$$\nabla^2 p' = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*$$

4. 更新速度和压强

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^* + \mathbf{u}' = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p' \\ p^{n+1} &= p^* + p'\end{aligned}$$

6.2.1 定常流

对于定常流, 迭代对应的时间推进是没有意义的, 因此我们在两个离散求解过程中都可以很大程度地偷懒, 只需要通过时间推进, 最终达到需要的精度即可, 尤其是求解 $\mathbf{u}^*$ 涉及的非线性方程组, 它的原始形式是

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u})^* + \nabla p^* = 0$$

可以把全隐改成半隐或者显式计算 $\mathbf{u}^*$:

1. 可以把对流项中的一个用 $\mathbf{u}^n$ 代替, 转化为关于 $\mathbf{u}^*$ 的线性方程组求解:

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^* - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^*) + \nabla p^* = 0$$

2. 可以把时间项和对流项中的一个用 $\mathbf{u}^n$ 代替, 相当于没有取时间项的离散方程组:

$$(\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^* - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^*) + \nabla p^* = 0$$

3. 甚至可以把对流项和黏性项完全使用 $\mathbf{u}^n$ 代替, 显式计算 $\mathbf{u}^*$:

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n) + \nabla p^* = 0$$

对于压强修正值的求解, 是一个 Poisson 方程

$$\nabla^2 p' = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*$$

离散得到的线性方程组, 也可以通过 G-S 迭代等进行固定步数的迭代, 近似求解。

6.2.2 非定常流

对于非定常流，迭代的每一步都是有意义的时间推进，两个离散求解过程都需要保持足够的精度，这里我们可以在预测速度和修正压强的隐式求解中分别进行内迭代，达到精确求解的目的，例如一种可选的计算流程如下：

1. 假设我们已有速度 $\mathbf{u}^n$ ，取一个合适的预测压强 p^* （例如直接取 $p^* = p^n$ ）
2. 基于预测压强 p^* ，进入 $\mathbf{u}^*$ 求解的内迭代：
 - (a) 获取合适的预测速度启动值 $\mathbf{u}^{*,0}$ ；
 - (b) 迭代计算预测速度：通过 $\mathbf{u}^{*,k}$ 计算 $\mathbf{u}^{*,k+1}$ ，直至收敛；
 - (c) 取 $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{*,k_M}$ 结束内迭代。
3. 基于预测速度 $\mathbf{u}^*$ ，进入 p' 求解的内迭代：
 - (a) 获取合适的修正压强启动值 p'^0 ；
 - (b) 迭代计算预测速度：通过 p'^k 计算 p'^{k+1} ，直至收敛；
 - (c) 取 $p' = p'^{k_N}$ 结束内迭代。
4. 更新速度和压强

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^* + \mathbf{u}' = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p' \\ p^{n+1} &= p^* + p'\end{aligned}$$

更高效的作法是把两个内迭代过程合在一起，组成一个内迭代过程，计算流程如下：

1. 假设我们已有速度 $\mathbf{u}^n$ ；
2. 进入内迭代，启动值 $\mathbf{u}^{n+1,0}, p^{n+1,0}$
 - (a) 获取预测压强 $p^{*,k} = p^{n+1,k-1}$ ；
 - (b) 基于预测压强 $p^{*,k}$ 和 $\mathbf{u}^{*,k-1}$ ，近似求解 $\mathbf{u}^{*,k}$ ；
 - (c) 基于预测速度 $\mathbf{u}^{*,k}$ 和 p'^{k-1} ，近似求解 p'^k ；
 - (d) 更新

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{n+1,k} &= \mathbf{u}^{*,k} + \mathbf{u}'^k = \mathbf{u}^{*,k} - \Delta t \nabla p'^k \\ p^{n+1,k} &= p^{*,k} + p'^k\end{aligned}$$

- (e) 直到 $\mathbf{u}^{n+1,k_N}, p^{n+1,k_N}$ 满足收敛条件，退出内迭代；

3. 更新速度和压强

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^{n+1,k_N} \\ p^{n+1} &= p^{n+1,k_N}\end{aligned}$$

6.3 其他

强烈推荐李新亮老师的[计算流体力学视频](#)，讲得 SIMPLE 比网上的其他各种教程都透彻详细。SIMPLE 算法的改进包括 SIMPLEC 算法，PISO 算法等，它们的改进主要是在迭代过程，以及系数上的小改动，以期望更快地达到收敛。

第七章 ALE 方法

任意拉格朗日法是一种用于处理动边界问题的方法，尤其在流体问题中得到应用，以这个方法的学习作为这一系列笔记的结束。

7.1 不可压 N-S 方程

在区域 Ω 上的不可压 N-S 方程如下（欧拉描述）

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nu \nabla^2 u + \nabla p = f$$
$$\nabla \cdot u = 0$$

其中 $u = u(x, t)$ ，时间导数是固定空间坐标 x 的偏导， $|_x$ 默认省略。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}|_x$$

或者利用随体导数 $|_X$ ，物质质点 X 和空间坐标 x 之间存在对应关系 $x = x(X, t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_X = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u$$

得到拉格朗日描述

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_X - \nu \nabla^2 u + \nabla p = f$$
$$\nabla \cdot u = 0$$

拉格朗日描述面临的问题是，流体的剧烈形变会破坏网格，计算难以继续。

7.2 ALE 描述的 N-S 方程

假设底层网格也存在一个独立运动，引入网格坐标 χ ，现在有三个坐标体系：

1. 物质坐标 X
2. 空间坐标 x
3. 网格坐标 χ

存在三个坐标之间的对应转换，例如可以根据物质坐标和时间，算出当前物质坐标的空间位置，流体速度就是对应的偏导数

$$x = x(X, t)$$
$$u = \frac{\partial x(X, t)}{\partial t}|_X$$

还可以根据当前网格坐标和时间，算出当前网格坐标的空间位置，网格速度就是对应的偏导数

$$x = x(\chi, t)$$

$$w = \frac{\partial x(\chi, t)}{\partial t} \Big|_{\chi}$$

注意到这里的流体速度 u 和网格速度 w 都与时间和空间坐标有关。

$$u = u(X, t) = u(X(x, t), t)$$

$$w = w(\chi, t) = w(\chi(x, t), t)$$

对于关于空间坐标和时间的物理量 $\phi = \phi(x, t)$ ，可以视作关于物质坐标和时间的物理量

$$\phi = \phi(x(X, t), t)$$

或者视作关于网格坐标和时间的物理量

$$\phi = \phi(x(\chi, t), t)$$

固定不同坐标可以得到不同的时间偏导数，存在如下转换关系

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_X = \frac{\partial \phi(x(X, t), t)}{\partial t} \Big|_X = \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_x + (u \cdot \nabla) \phi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\chi} = \frac{\partial \phi(x(\chi, t), t)}{\partial t} \Big|_{\chi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_x + (w \cdot \nabla) \phi$$

因此有

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_x = \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\chi} - (w \cdot \nabla) \phi$$

取 $\phi = u$ 代入 N-S 方程即得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\chi} + (u - w) \cdot \nabla u - \nu \nabla^2 u + \nabla p = f$$

$$\nabla \cdot u = 0$$

这里的空间导数全都是关于空间坐标 x 的偏导，时间导数是 $|_{\chi}$ 即固定网格坐标时的偏导。ALE 引入的网格在空间中的运动是独立的，并且上式可以兼容欧拉描述和拉格朗日描述。

ALE 介于欧拉描述和拉格朗日描述之间：网格的运动既不是固定的，也不是完全跟随流体的。网格会跟随流体的运动进行一个平缓的形变，在动边界处尽可能与流体位移匹配，在固定边界处保持不动，在内部尽可能保证网格的质量。

7.3 ALE 推出欧拉描述

从下式出发

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\chi} + (u - w) \cdot \nabla u - \nu \nabla^2 u + \nabla p = f$$

$$\nabla \cdot u = 0$$

如果我们将网格固定，那么网格坐标 χ 和空间坐标 x 的一一对应就与时间无关： $x = x(\chi)$ ，从而网格速度恒为零

$$w = \frac{\partial x(\chi)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\chi} = \frac{\partial u}{\partial t} + (w \cdot \nabla) u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

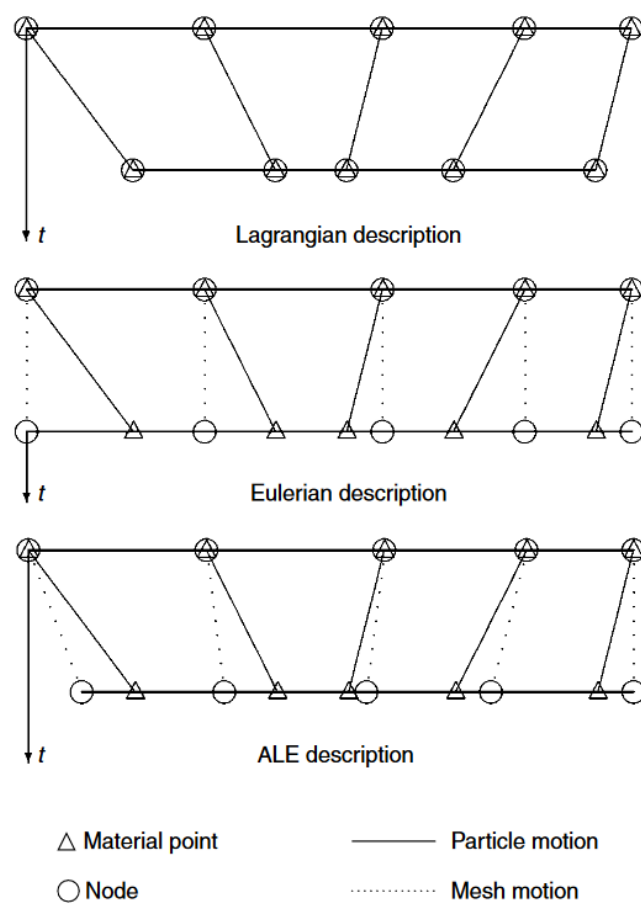


图 7.1: ALE 示意图

因此得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nu \nabla^2 u + \nabla p &= f \\ \nabla \cdot u &= 0\end{aligned}$$

即欧拉描述下的 N-S 方程。

7.4 ALE 推出拉格朗日描述

从下式出发

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}|_{\chi} + (u - w) \cdot \nabla u - \nu \nabla^2 u + \nabla p &= f \\ \nabla \cdot u &= 0\end{aligned}$$

如果我们令网格速度总是等于流体速度，也就是网格的形变时刻对应着流体的形变，网格坐标 χ 和物质坐标 X 的一一对应就与时间无关： $X = X(\chi)$ ，由于 $u = w$ ，我们可知

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_X = \frac{\partial u}{\partial t}|_x + (u \cdot \nabla)u = \frac{\partial u}{\partial t}|_x + (w \cdot \nabla)u = \frac{\partial u}{\partial t}|_{\chi}$$

因此得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}|_X - \nu \nabla^2 u + \nabla p &= f \\ \nabla \cdot u &= 0\end{aligned}$$

即拉格朗日描述下的 N-S 方程。

7.5 N-S 方程全离散

在 $t^n \rightarrow t^{n+1}$ 的时间步，已有 t^n 时刻的三角网格 Ω^n ，其上的某个三角单元 K^n ，以及定义在 Ω^n 上的速度 u^n 。基于 u^n 我们可以构造相应的网格速度 w^n （在每一个顶点处需要一个移动速度），要求：

1. 在动边界的节点处， w^n 根据动边界的位移确定
2. 在固定边界的节点处， $w^n = 0$
3. 在内部节点处， w^n 平缓过渡，保证三角网格的质量

然后，将 Ω^n 的每一个顶点基于网格速度 w^n 进行移动，得到新的三角网格 Ω^{n+1} ，三角单元 K^n 变形为 K^{n+1} 。

将定义在 Ω^n 上的 u^n 转换为定义在 Ω^{n+1} 上的 $\tilde{u}^n$ ：记参考单元 K ，存在两个映射

$$\phi_{K^n} : K \rightarrow K^n, \quad \phi_{K^{n+1}} : K \rightarrow K^{n+1}$$

取

$$\begin{aligned}\tilde{u}^n(\phi_{K^{n+1}}(x)) &= u^n(\phi_{K^n}(x)) \\ \tilde{u}^n &= u^n \circ \phi_{K^n} \circ \phi_{K^{n+1}}^{-1}\end{aligned}$$

这样可以体现出时间导的 $|_x$ ，即固定网格坐标。以上的转换并不需要额外的计算。从下式出发，向后欧拉离散。

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}|_x + (u - w) \cdot \nabla u - \nu \nabla^2 u + \nabla p &= f \\ \nabla \cdot u &= 0\end{aligned}$$

任取定义在 K^{n+1} 上的测试函数 v, q ，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t}((u^{n+1} - \tilde{u}^n), v)_{K^{n+1}} + ((u^{n+1} - w^n) \cdot \nabla u^{n+1}, v)_{K^{n+1}} \\ - \nu(\nabla^2 u^{n+1}, v)_{K^{n+1}} + (\nabla p^{n+1}, v)_{K^{n+1}} = (f^{n+1}, v)_{K^{n+1}} \\ (\nabla \cdot u^{n+1}, q)_{K^{n+1}} = 0\end{aligned}$$

可以求解得到定义在三角网格 Ω^{n+1} 的 u^{n+1}, p^{n+1} 。

Remark. 在欧拉描述下的 N-S 方程中，时间导是 $|_x$ ，即固定空间坐标，计算网格基本保持不动。如果 t^n 时刻需要改变计算网格，我们就需要在不同三角形单元之间进行插值构造：根据 Ω^n 上的 u^n 来得到 Ω^{n+1} 的 $\tilde{u}^n$ ，满足

$$\tilde{u}^n(x) = u^n(x)$$

对于 ALE 和欧拉描述，定义在 K^{n+1} 的 $\tilde{u}^n$ 是不一样的，差异体现在了网格移动多出来的对流项 $w \cdot \nabla u$ 。

7.6 小结

从上述推导可以看出，对于一般的方程（欧拉描述， x 为空间坐标）

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_x = F(u)$$

转换为拉格朗日描述（ X 为物质坐标）

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_X - \frac{\partial x}{\partial t}|_X \cdot \nabla u = F(u)$$

转换为 ALE 描述（ x 为网格坐标）

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_x - \frac{\partial x}{\partial t}|_x \cdot \nabla u = F(u)$$