

一维双曲守恒律方程（组）和 Hamilton Jacobi 方程笔记

Shun Li

May 14, 2025

整理一下关于一维双曲守恒律方程（组）和 Hamilton Jacobi 方程的基本知识以及对应的算例参考解计算。关于算例的说明：非 Riemann 问题的算例默认采用周期边界，主要关注如何通过特征线方法获取精确解，对于激波附近需要设置合适的初值，对于稀疏波区域需要进行额外处理；对于 Riemann 问题，特征线方法已经发挥不了什么作用，主要依赖对每一个问题进行具体的分析。

目录

1	一维双曲守恒律方程	2
1.1	特征线方程	2
1.2	数值算例	3
2	一维 Hamilton Jacobi 方程	6
2.1	特征线方程	6
2.2	数值算例	8
3	一维 Euler 方程组	13
3.1	控制方程与状态方程	13
3.2	一些物理记号	14
3.3	守恒与非守恒形式	15
3.4	边界条件	16
3.5	精度测试算例	17
4	一维 Euler 方程组的 Riemann 问题	19
4.1	Riemann 问题介绍	19
4.2	初步分析与分类	20
4.3	具体计算	20
4.4	Riemann 问题算例	26
4.5	参考资料	30
A	双曲方程组笔记	30

1 一维双曲守恒律方程

1.1 特征线方程

考虑一维双曲守恒律方程

$$u_t + f(u)_x = 0$$

只考虑 f 仅和 u 有关的模型。在 $x-t$ 平面上, 从 $(\xi, 0)$ 发出的曲线记作 $l_\xi : x = x(s)$, 满足 $x(0) = \xi$ 。考虑方程的解 u 沿着曲线 l_ξ 的变化情况

$$\frac{d}{ds}u(x(s), s) = u_x(x(s), s)x'(s) + u_t(x(s), s) = u_x(x(s), s)[x'(s) - f'(u(x(s), s))]$$

如果 $x = x(s)$ 是如下 ODE 问题的解

$$\begin{cases} x'(s) = f'(u(x(s), s)) \\ x(0) = \xi \end{cases}$$

那么由上式可知 u 的值沿曲线 l_ξ 保持不变。

$$\frac{d}{ds}u(x(s), s) = 0$$

此时曲线 l_ξ 称为守恒律方程的特征线, 取 ξ 遍历所有的起点坐标, 就可以得到所有的特征线组成的曲线族 $\{l_\xi\}$ 。继续对 $x'(s) = u(x(s), s)$ 关于 s 求导可得

$$x''(s) = \frac{d}{ds}u(x(s), s) = 0$$

因此 $x = x(s)$ 是线性函数, l_ξ 是 $x-t$ 平面上的直线, 直线的斜率可以通过起点确定

$$x'(s) = x'(s)|_{s=0} = f'(u(x(0), 0)) = f'(u_0(\xi))$$

结合初值条件 $x(0) = \xi$ 可以得到 $x = x(s)$ 的表达式, 因此特征线方程为

$$x = x(s) = \xi + f'(u_0(\xi))s$$

激波所对应的是特征线的相交, u 在激波位置表现为强间断 (函数值不连续), 分析易得, 若 u_0 和 $f(u)$ 具有足够光滑性, 那么

1. 如果初值 $u_0(x)$ 始终有 $f''(u_0(x))u'_0(x) \geq 0$, 那么特征线始终不会相交。
2. 如果初值 $u_0(x)$ 满足 $\min f''(u_0(x))u'_0(x) < 0$, 那么只能保证在短时间内特征线不会相交, 但是在超过临界时刻后, 特征线会出现相交, 临界时刻 T_b 具体为

$$T_b = \frac{-1}{\min f''(u_0(x))u'_0(x)} > 0$$

在部分情况下可以使用特征线方程获取精确解:

1. 在不考虑激波和稀疏波等复杂情况时, 如果对于 (x, t) 可以计算得到经过该点的一条特征线 l_ξ , 利用特征线的性质就可以得到 $u(x, t) = u_0(\xi)$ 。因此问题归结为关于 ξ 的非线性方程求根

$$F(\xi) = x - \xi - f'(u_0(\xi))t = 0$$

也可以代入得到关于 u 的非线性方程

$$G(u) = u - u_0(x - f'(u)t) = 0$$

可以使用牛顿迭代等数值方法求解, 也可以调用更一般的非线性求解器进行求解。

2. 如果存在激波, 那么上述非线性方程本身就存在多个零点, 在激波附近需要提供足够接近的初值使非线性求根算法收敛到正确的零点。
3. 如果存在稀疏波, 那么对于稀疏波区域, 特征线方法是完全无能为力的, 因为此时上述非线性方程没有零点, 没有特征线经过 (x, t) 点, 必须使用额外的方法获取稀疏波区域的解。

1.2 数值算例

Example 1.1. 考虑计算区域 $[0, 2\pi]$, Burgers 方程 ($f(u) = \frac{1}{2}u^2$), 初值

$$u_0(x) = \sin(x)$$

Solution 1.1. 计算易得特征线在 $T_b = 1$ 时刻后会出现相交。由特征线趋势 (图 1a) 以及等面积法分析可知

1. 在 $x = \pi$ 产生固定不动的激波;
2. 图像关于 $(0, 0)$ 和 $(\pi, 0)$ 均为中心对称。

为了在激波附近收敛到正确的零点, 需要提供足够接近的初值。先考虑关于 u 的非线性方程

$$G(u) = u - u_0(x - ut) = 0$$

在 (x, t) 求解 u 所用的迭代初值 $u^{(0)}$ 可以通过将解的形态近似为三角形获取, 三角形的顶点通过追踪极值点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的移动获得, 如图 2。具体表达式为

$$u^{(0)} = \begin{cases} kx, & x \in (0, \pi) \\ k(x - 2\pi), & x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}, \quad k = \frac{1}{\pi/2 + t}$$

对于关于 ξ 的非线性方程

$$F(\xi) = x - \xi - u_0(\xi)t = 0$$

通过等价关系可得对应的迭代初值选取

$$\xi^{(0)} = x - u^{(0)}t$$

几个不同时刻的解如图 1b 所示。 □

Example 1.2. 考虑计算区域 $[x_l, x_r]$, Burgers 方程 ($f(u) = \frac{1}{2}u^2$), 初值

$$u_0(x) = \alpha + \beta \sin(\omega x + \phi), \quad \omega = \frac{2\pi}{x_r - x_l}, \quad \beta > 0$$

负振幅可以通过将相位增加 π 转为正振幅。

Solution 1.2. 只需要注意到如下代换关系

$$u(x, t) = \alpha + \beta \tilde{u}(\omega x + \phi - \alpha \omega t, \beta \omega t)$$

其中 $\tilde{u}$ 满足

$$\tilde{u}_t + \left(\frac{1}{2} \tilde{u}^2 \right)_x = 0, \quad \tilde{u}(x, 0) = \sin(x)$$

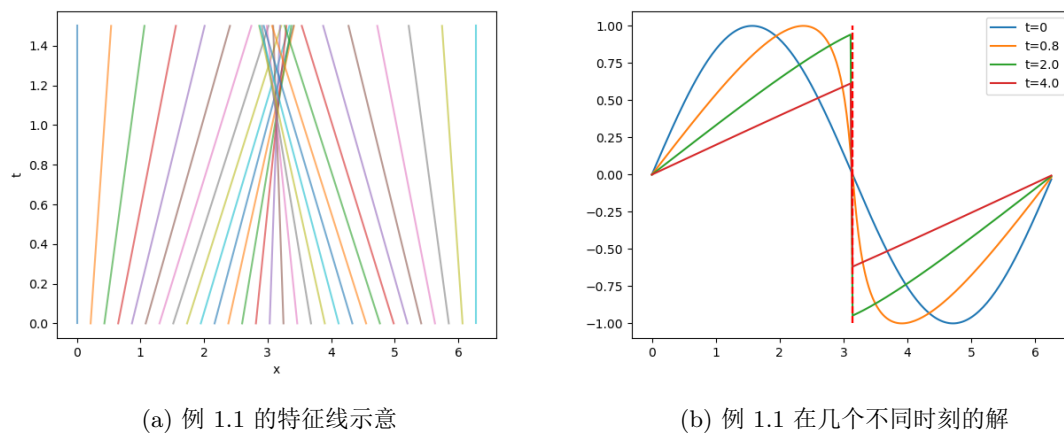


图 1: 例 1.1 的特征线示意和精确解曲线

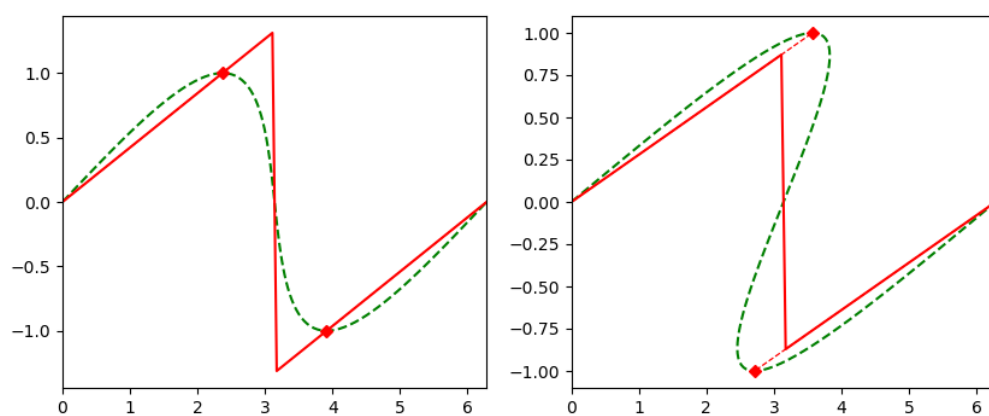


图 2: 例 1.1 基于三角形近似获取迭代初值, 红点标记极值点的位置, 红线为实际选取的迭代初值

也就是例 1.1 的解，因此加上一层代换就可以获取精确解。通过代换关系还可以得到更多的信息，例如特征线交汇的临界时间为

$$T_b = \frac{1}{|\beta\omega|}$$

激波的位置不在固定，而是以速度 α 移动，具体位置为

$$x = \frac{\pi - \phi}{\omega} + \alpha t$$

例如具体取 $[x_l, x_r] = [-\pi, \pi]$ ，初值

$$u_0(x) = 1 + 2 \sin(x)$$

几个不同时刻的解如图 3 所示。

□

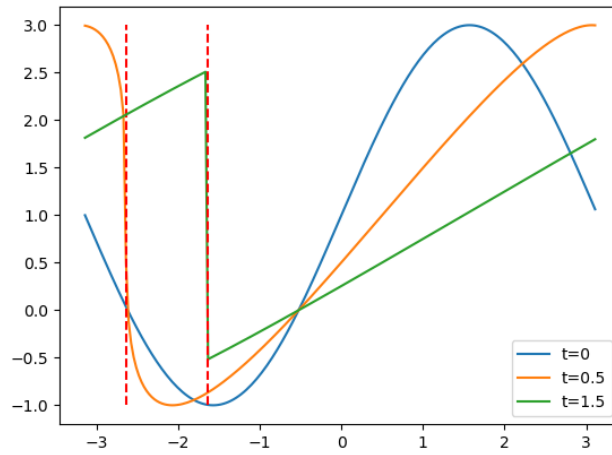


图 3: 例 1.2 在几个不同时刻的解

对于 Riemann 问题，特征线方法已经发挥不了什么作用，需要对问题进行具体的分析。

Example 1.3. 考虑 Buckley-Leverett equation

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad f(u) = \frac{u^2}{u^2 + \alpha(1-u)^2}, \quad (\alpha = \frac{1}{4})$$

取两组初值: $u_L = 2, u_R = -2$; $u_L = -3, u_R = 3$ 。

Solution 1.3.

Case 1: 初值 $u_L > u_R$ ，考虑 $y = f(u)$ 下方的凸集，需要计算两条切线的两个切点：

1. 过 $(-2, f(-2))$ 与 $y = f(u)$ 切于 $(u_1, f(u_1))$ 的切线，切点 $u_1 = \frac{2+\sqrt{5}}{5} \approx 0.847214$;
2. 过 $(2, f(2))$ 切于 $(u_2, f(u_2))$ 的切线，切点 $u_2 = \frac{10+\sqrt{85}}{15} \approx 1.2813$ 。

凸集如图 4a，因此精确解由激波、稀疏波和激波组成：

1. 第一个激波, 速度 $s_l = f'(u_2) < 0$, 向左传播;
2. 中间部分 $[s_l t, s_r t]$ 为稀疏波;
3. 第二个激波, 速度 $s_r = f'(u_1) > 0$, 向右传播。

精确表达式为

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x < s_l t \\ (f')^{-1}(x/t), & s_l t < x < s_r t \\ u_r, & x > s_r t \end{cases}$$

$t = 1$ 时刻精确解如图 4e, 其它时刻的解由自相似性可得。

Case 2: 初值 $u_l < u_r$, 因此考虑 $y = f(u)$ 上方的凸集, 此时需要计算两条切线的两个切点:

1. 经过 $(-3, f(-3))$ 切于 $(u_1, f(u_1))$ 的切线, 切点 $u_1 = \frac{15-2\sqrt{65}}{35} \approx -0.032129$;
2. 经过 $(3, f(3))$ 切于 $(u_2, f(u_2))$ 的切线, 切点 $u_2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{5} \approx 0.0343146$ 。

凸集如图 4b, 因此精确解由激波、稀疏波和激波组成:

1. 第一个激波, 速度 $s_l = f'(u_1) < 0$, 向左传播;
2. 中间部分 $[s_l t, s_r t]$ 为稀疏波;
3. 第二个激波, 速度 $s_r = f'(u_2) > 0$, 向右传播。

精确表达式为

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x < s_l t \\ (f')^{-1}(x/t), & s_l t < x < s_r t \\ u_r, & x > s_r t \end{cases}$$

$t = 1$ 时刻精确解如图 4f, 其它时刻的解由自相似性可得。

□

2 一维 Hamilton Jacobi 方程

2.1 特征线方程

考虑一维 Hamilton Jacobi 方程

$$\phi_t + H(\phi_x) = 0$$

只考虑 H 仅和 ϕ_x 有关的模型, 引入记号 $p = \phi_x$, 对原方程关于空间变量 x 求导可得

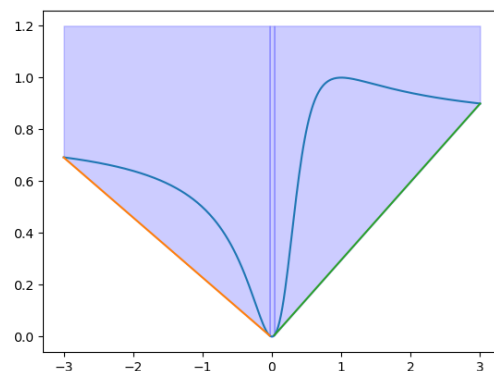
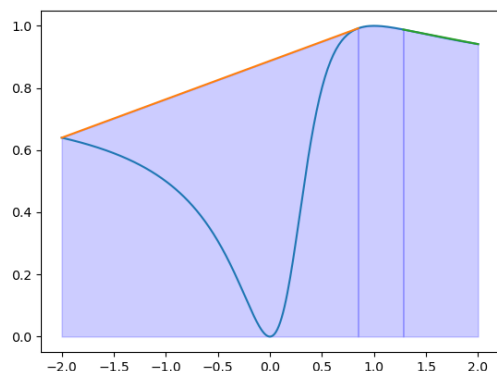
$$\phi_{tx} + H(\phi_x)_x = 0$$

因此 p 满足一维守恒律方程

$$p_t + H(p)_x = 0$$

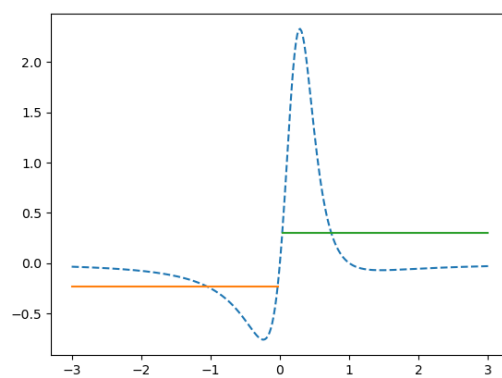
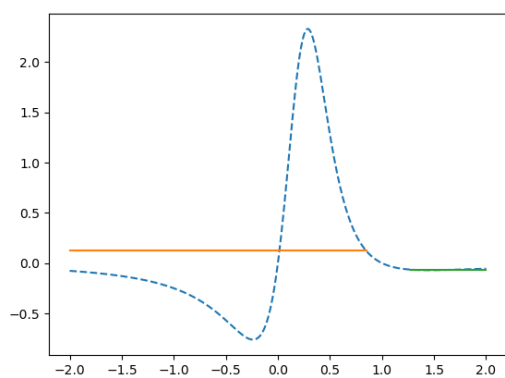
由守恒律方程的特征线可知, 取 $x - t$ 平面上的曲线 $l_\xi: x = x(s)$ 为如下 ODE 问题的解

$$\begin{cases} x'(s) = H'(p(x(s), s)) \\ x(0) = \xi \end{cases}$$



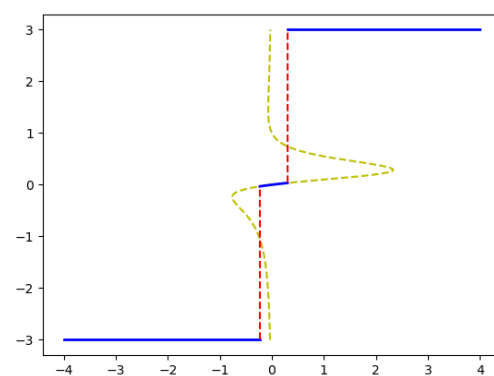
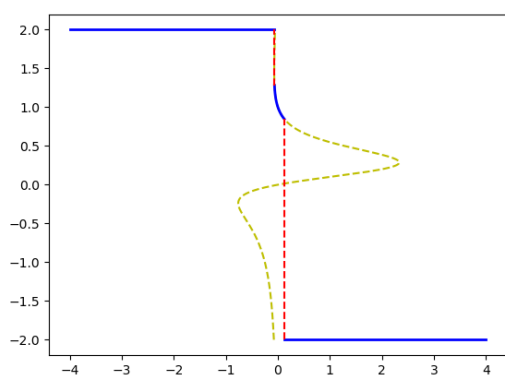
(a) Case 1, $u_l > u_r$, $y = f(u)$, 考虑 $f(u)$ 下方凸集, 得到两个切点 u_1, u_2

(b) Case 2, $u_l < u_r$, $y = f(u)$, 考虑 $f(u)$ 上方凸集, 得到两个切点 u_1, u_2



(c) Case 1, $u_l > u_r$, $y = f'(u)$

(d) Case 2, $u_l < u_r$, $y = f'(u)$



(e) Case 1, $t = 1$ 精确解, 黄色虚线 $u = (f')^{-1}(x)$

(f) Case 2, $t = 1$ 精确解, 黄色虚线 $u = (f')^{-1}(x)$

图 4: Buckley-Leverett equation, Riemann problem

具体表达式为

$$x(s) = \xi + H'(p_0(\xi))s$$

那么 $p = \phi_x$ (ϕ 是原方程的解) 沿着曲线的值保持不变

$$\frac{d}{ds}p(x(s), s) = 0$$

考虑方程的解 ϕ 沿着曲线 l_ξ 的变化情况

$$\frac{d}{ds}\phi(x(s), s) = \phi_x(x(s), s)x'(s) + \phi_t(x(s), s) = p(x(s), s)H'(p(x(s), s)) - H(p(x(s), s))$$

定义 $H(p)$ 的对偶函数

$$L(p) = pH'(p) - H(p)$$

那么

$$\frac{d}{ds}\phi(x(s), s) = L(p(x(s), s))$$

因此解 ϕ 沿着曲线 l_ξ 均匀变化

$$\phi(x(s), s) = \phi(\xi, 0) + L(p(x(s), s))s = \phi_0(\xi) + L(p_0(\xi))s$$

与双曲守恒律方程类似, Hamilton Jacobi 方程的特征线也可能出现交汇, 若 p_0 和 $H(p)$ 均具有足够光滑性, 那么

1. 如果初值 $p_0(x)$ 始终有 $H''(p_0(x))p'_0(x) \geq 0$, 那么特征线始终不会相交。
2. 如果初值 $p_0(x)$ 满足 $\min H''(p_0(x))p'_0(x) < 0$, 那么只能保证在短时间内特征线不会相交, 但是在超过临界时刻后, 特征线会出现相交, 临界时刻 T_b 具体为

$$T_b = \frac{-1}{\min H''(p_0(x))p'_0(x)} > 0$$

与守恒律方程不同, Hamilton Jacobi 方程的特征线交汇意味着 $p = \phi_x$ 出现强间断, 此时 ϕ 表现为弱间断 (函数值连续, 一阶导不连续), 函数曲线产生尖点。

在部分情况下同样可以使用特征线方程获取精确解:

1. 在不考虑激波和稀疏波等复杂情况时, 如果对于 (x, t) 可以计算得到经过该点的一条特征线 l_ξ , 利用特征线的性质就可以得到

$$\phi(x, t) = \phi_0(\xi) + L(p_0(\xi))t, \quad p(x, t) = p_0(\xi)$$

因此问题归结为关于 ξ 的非线性方程求根

$$F(\xi) = x - \xi - H'(p_0(\xi))t = 0$$

可以使用牛顿迭代等数值方法求解, 也可以调用更一般的非线性求解器进行求解。

2. 如果存在激波, 那么上述非线性方程本身就存在多个零点, 在激波附近需要提供足够接近的初值使非线性求根算法收敛到正确的零点。
3. 如果存在稀疏波, 那么对于稀疏波区域, 特征线方法是完全无能为力的, 因为此时上述非线性方程没有零点, 没有特征线经过 (x, t) 点, 必须使用额外的方法获取稀疏波区域的解。

Remark. 对于 Hamilton Jacobi 方程, 这里所讨论的激波和稀疏波都是针对 p 以及它所满足的守恒律方程。

2.2 数值算例

Example 2.1. 考虑计算区域 $[0, 2\pi]$, $H(p) = |p|$, 初值

$$\phi_0(x) = \sin(x), \quad p_0(x) = \cos(x)$$

Solution 2.1. 由于 $H(p) = |p|$ 的光滑性不够, 只能直接分析特征线走向, 如图 5a, 特征线在 $t > 0$ 会在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处立刻相交。在短时间 ($t < \pi$) 的解 u 具有如下性质

1. 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 产生固定不动的激波;
2. 在 $[\frac{3\pi}{2} - t, \frac{3\pi}{2} + t]$ 区域产生稀疏波;
3. 图像关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 以及 $x = \frac{3\pi}{2}$ 对称。

如果 $t \geq \pi$, 稀疏波会覆盖所有区域。

由于在每一个区域都只是线性问题, 可以直接给出精确解:

1. 对于 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\phi(x, t) = \begin{cases} \sin(x - t), & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \sin(x + t), & x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} - t] \\ -1, & x \in (\frac{3\pi}{2} - t, \frac{3\pi}{2} + t] \\ \sin(x - t), & x \in (\frac{3\pi}{2} + t, 2\pi] \end{cases}$$

2. 对于 $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$

$$\phi(x, t) = \begin{cases} -1, & x \in [0, t - \frac{\pi}{2}] \\ \sin(x - t), & x \in (t - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \sin(x + t), & x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} - t] \\ -1, & x \in (\frac{3\pi}{2} - t, 2\pi] \end{cases}$$

3. 对于 $t \geq \pi$, $\phi(x, t) = -1$ 被稀疏波完全覆盖。

下面只考虑 $t < \pi$ 的解, 为了在激波附近收敛到正确的零点, 需要提供足够接近的初值, 可以根据特征线的方向设置

$$\xi^{(0)} = \begin{cases} x - t, & x \in \{x \in (0, 2\pi) \mid \cos(x) > 0\} \\ x + t, & x \in \{x \in (\pi, 2\pi) \mid \cos(x) < 0\} \end{cases}$$

最后还需要对稀疏波区域进行额外的修正

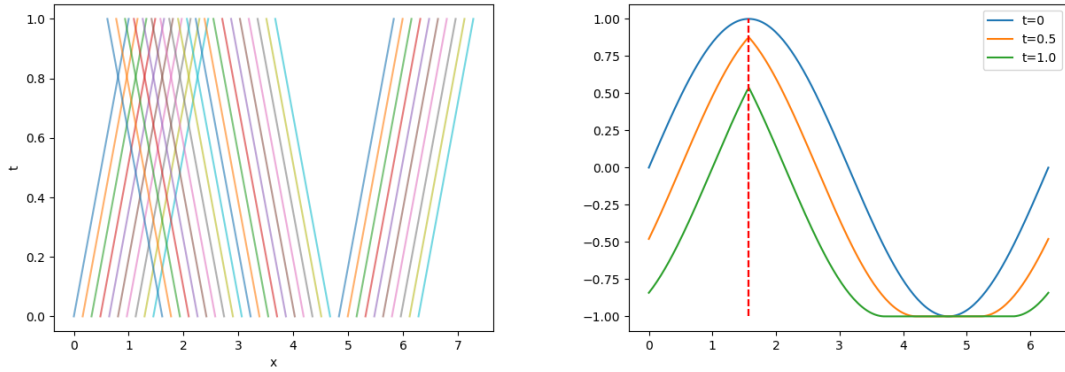
$$\phi(x, t) = -1, \quad x \in [\frac{3\pi}{2} - t, \frac{3\pi}{2} + t]$$

几个不同时刻的解如图 5b 所示。

□

Example 2.2. 考虑计算区域 $[0, 2\pi]$, $H(p) = \frac{1}{2}p^2$, 初值

$$\phi_0(x) = \sin(x), \quad p_0(x) = \cos(x)$$



(a) 例 2.1 的特征线示意

(b) 例 2.1 在几个不同时刻的解

图 5: 例 2.1 的特征线示意和精确解曲线

Solution 2.2. 计算易得特征线在 $T_b = 1$ 时刻后会出现相交，特征线趋势如图 6a。 $p = \phi_x$ 满足的守恒律方程为 Burgers 方程

$$p_t + H(p)_x = 0, \quad H(p) = \frac{1}{2}p^2$$

初值为 $p_0(x) = \cos(x)$ ，与例 1.1 类似分析可得

1. 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 产生固定不动的激波；
2. 图像关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 和 $x = \frac{3\pi}{2}$ 对称。

关于迭代初值的选取，同样可以参照例 1.1，与之略微不同的是初值从 $\sin(x)$ 变成了 $p_0(x) = \cos(x)$ ，因此

$$p^{(0)} = \begin{cases} k(x + \frac{\pi}{2}), & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ k(x - \frac{3\pi}{2}), & x \in (\frac{\pi}{2}, 2\pi) \end{cases}, \quad k = \frac{1}{\pi/2 + t}$$

通过等价关系可得对应的迭代初值选取

$$\xi^{(0)} = x - p^{(0)}t$$

几个不同时刻的解如图 6b 所示。

□

Example 2.3. 考虑计算区域 $[0, 2\pi]$ ， $H(p) = \frac{1}{2}p^2$ ，非光滑初值

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \pi - x, & x \in (0, \pi) \\ x - \pi, & x \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \quad p_0(x) = \begin{cases} -1, & x \in (0, \pi) \\ 1, & x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Solution 2.3. 由于 $p_0(x)$ 的光滑性不够，只能直接分析特征线走向，如图 7a，特征线在 $t > 0$ 会在 $x = 0$ 处立刻相交。在短时间 ($t < \pi$) 的解 u 具有如下性质

1. 在 $x = 0$ 产生固定不动的激波；
2. 在 $[\pi - t, \pi + t]$ 区域产生稀疏波；
3. 图像关于 $x = 0$ 以及 $x = \pi$ 对称。

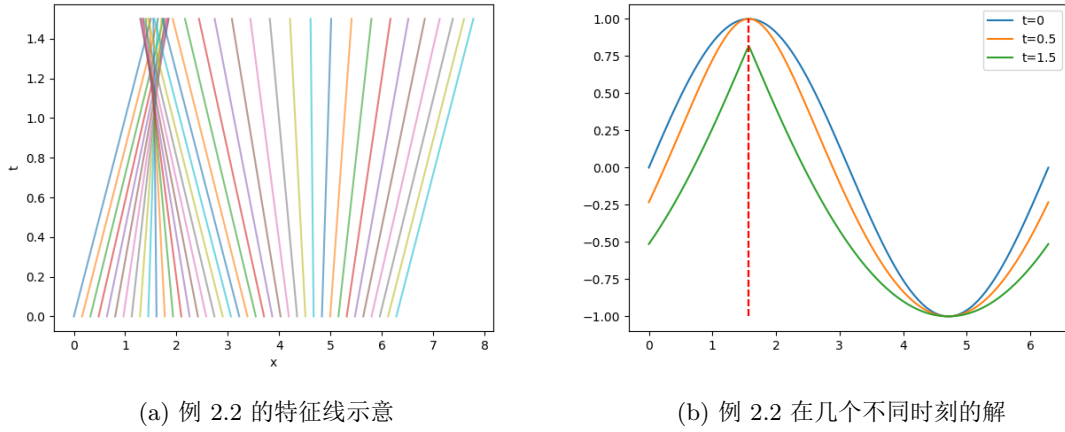


图 6: 例 2.2 的特征线示意和精确解曲线

如果 $t > \pi$, 稀疏波区域会覆盖激波。下面只考虑 $t < \pi$ 的解, 为了在激波附近收敛到正确的零点, 需要提供足够接近的初值, 可以根据特征线的方向设置

$$\xi^{(0)} = \begin{cases} x + t, & x \in (0, \pi) \\ x - t, & x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

最后还需要对稀疏波区域进行额外的修正 (稀疏波 $p(x, t) = \frac{x-\pi}{t}$ 对空间积分)

$$\phi(x, t) = \frac{(x - \pi)^2}{2t}, \quad x \in [\pi - t, \pi + t]$$

几个不同时刻的解如图 7b 所示。

□

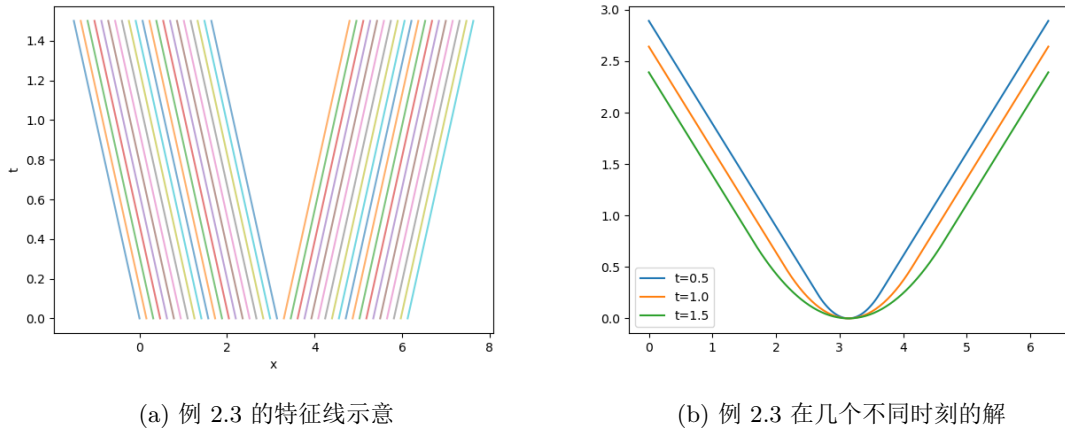


图 7: 例 2.3 的特征线示意和精确解曲线

Example 2.4. 考虑计算区域 $[-1, 1]$, $H(p) = \frac{1}{2}(p + \alpha)^2$ (其中 $\alpha > 0$), 初值

$$\phi_0(x) = -\cos(\pi x), \quad p_0(x) = \pi \sin(\pi x)$$

Solution 2.4. 计算易得特征线在 $T_b = \frac{1}{\pi^2} \approx 0.101$ 时刻后会出现相交, 特征线趋势如图 8a。 $p = \phi_x$ 满足的守恒律方程为

$$p_t + H(p)_x = 0, \quad H(p) = \frac{1}{2}(p + \alpha)^2$$

初值为 $p_0(x) = \pi \sin(\pi x)$, 取 $q = p + \alpha$, 那么 q 满足的方程即为 Burgers 方程

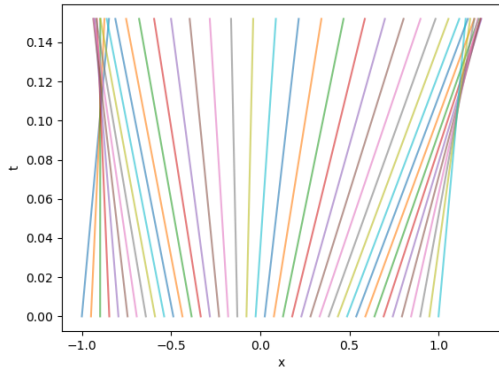
$$q_t + \left(\frac{1}{2}q^2\right)_x = 0, \quad q_0(x) = \alpha + \pi \sin(\pi x)$$

利于例 1.2 的结论可得 q 在 $x = 1 + \alpha t$ 位置产生移动的激波, $p = q - \alpha$ 只差一个常数, 因此特征线和激波位置均与 q 相同。

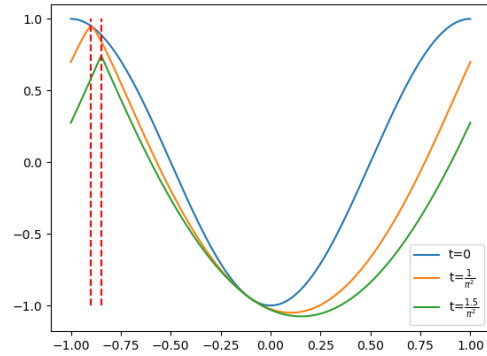
关于迭代初值的选取, 同样可以参照例 1.2 进行转换, 也可以直接根据特征线的趋势选取: 观察到所有的激波位置 $x = 1 + \alpha t + 2k$ 是 $x - t$ 平面上的一组平行线, 将整个平面分成无数个条形区域, 每个区域中的特征线向两侧汇聚, 因此可以使用区域中点作为迭代初值

$$\xi^{(0)} = \begin{cases} -2, & x - \alpha t \in (-3, -1) \\ 0, & x - \alpha t \in (-1, 1) \\ 2, & x - \alpha t \in (1, 3) \\ \dots & \end{cases}$$

取 $\alpha = 1$, 几个不同时刻的解如图 8b 所示。 □



(a) 例 2.4 的特征线示意



(b) 例 2.4 在几个不同时刻的解

图 8: 例 2.4 的特征线示意和精确解曲线

Example 2.5. 考虑计算区域 $[-1, 1]$, $H(p) = -\cos(p + \alpha)$ (其中 $\alpha > 0$), 初值

$$\phi_0(x) = -\cos(\pi x), \quad p_0(x) = \pi \sin(\pi x)$$

Solution 2.5. 这个方程的理论分析比较困难。由于

$$H''(p) = \cos(p + \alpha) = \cos(\pi \sin(\pi x) + \alpha), \quad p'_0(x) = \pi^2 \cos(\pi x)$$

因此

$$T_b = \frac{-1}{\pi^2 \min_x \cos(\pi \sin(\pi x) + \alpha) \cos(\pi x)}$$

并没有显式解, 取 $\alpha = 1$, 则 $T_b \approx 0.106$ 。

p 满足的守恒律方程为

$$p_t - \cos(p + \alpha)_x = 0, \quad p_0(x) = \pi \sin(\pi x)$$

这个方程不好处理。变量代换令 $w = \sin(p + \alpha)$, 可以验证 w 满足 Burgers 方程

$$w_t + ww_x = 0, \quad w_0(x) = \sin(\alpha + \pi \sin(\pi x))$$

但是对于 w 仍然无法精确求解, 只能通过特征线走向结合数值求解给出一些粗糙的估计:

1. 特征线的走向取决于 $w_0(\xi)$ 的正负, 比较混乱。
2. $t \rightarrow T_b^-$ 时, 特征线会在 $x_1 = \xi_1 + w_0(\xi_1)T_b$ 位置汇聚, 产生第一个激波, 激波移动速度未知。
3. $t \rightarrow T_2^-$ 时, 特征线会在 $x_2 = \xi_2 + w_0(\xi_2)T_2$ 位置汇聚, 产生第二个激波, 激波移动速度未知。

其中

$$T_b \approx 0.106285, \quad \xi_1 \approx -0.907423, \quad x_1 \approx -0.896904$$

$$T_2 \approx 0.13088, \quad \xi_2 \approx 0.201604, \quad x_2 \approx 0.238053$$

由于无法准确刻画特征线的分布趋势, 目前只能基于采样法获取迭代初值: 首先按照起点均匀选取一组特征线 $\{l_\xi\}$, 然后计算在 t 时刻最接近 x 的 l_{ξ^*} , 选取 ξ^* 作为迭代初值。取 $\alpha = 1$, 几个不同时刻的解如图 9b 所示。 $\square$

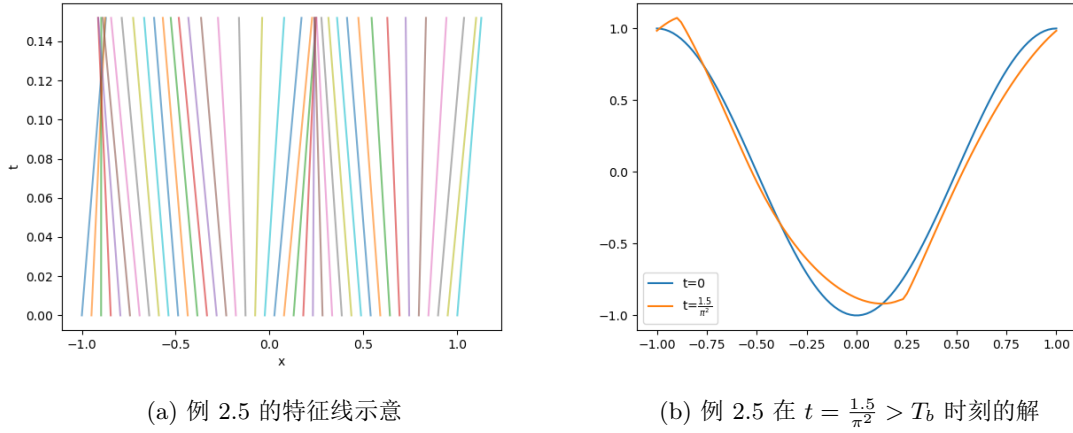


图 9: 例 2.5 的特征线示意和精确解曲线

3 一维 Euler 方程组

3.1 控制方程与状态方程

一维的可压缩流体满足 Euler 方程组, 主要由三个控制方程组成

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix}_x = 0$$

分别对应质量守恒、动量守恒和能量守恒。涉及的记号含义为:

- 密度 (density) $\rho = \rho(x, t)$;
- 速度 (velocity) $u = u(x, t)$;
- 压强 (pressure) $p = p(x, t)$;
- 单位体积的总能量 (total energy) $E = E(x, t)$ 。

这里还缺少一个状态方程与控制方程组一起组成封闭的方程组。

可压缩流体的单位体积总能量 E 包括动能和内能两部分

$$E = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e$$

其中 e 是比内能 (specific internal energy), 由流体的压强和密度决定: $e = e(\rho, p)$ 。对于理想气体, 比内能和总能量的具体形式为

$$e = e(\rho, p) = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}$$

$$E = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1}$$

这里 $\gamma = c_p/c_v$ 是绝热指数 (等压热容和等容热容的比值), 通常取为 $\gamma = \frac{7}{5} = 1.4$ 。因此对理想气体添加下面的状态方程, 就可以得到封闭的方程组

$$E = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1}$$

3.2 一些物理记号

为了下文推导的方便, 我们还需要一些具有物理背景的概念与记号。在前面我们引入的几个物理量: 密度、速度、压强、能量和比内能, 除了速度允许用正负值来代表方向之外, 其它的物理量都是必须大于零的, 有时等于零在物理上也是合理的, 但是相对来说是一种极端情形, 我们不作考虑。

在可压缩流体中的声速 (sound speed) 为

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

这里根式内部的值在物理上一定是非负的, 可以进行开方。但是这在数值计算中是不一定的, 我们可能需要用保正限制器来专门抑制数值振荡, 确保开方操作的合法性。

与总能量/比内能类似, 在物理上还有总焓和比焓的概念, 通常用 H 代表总焓, 用 h 代表比焓, 具体表达式为

$$h = h(\rho, p) = e + \frac{p}{\rho}$$

$$H = \frac{1}{2}u^2 + h = \frac{E + p}{\rho}$$

一个更重要的概念是熵 (entropy), 用记号 s 表示

$$s = c_v \ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + C_0$$

我们考虑的理想气体的 (无黏) 流动实际上是等熵流, 这意味着

$$\frac{Ds}{Dt} = s_t + us_x = 0$$

这个方程并不独立，它可以通过前几个控制方程和状态方程推出，也可以用来替换能量守恒方程。等熵流表明：沿着流体粒子的运动路径，我们有如下的守恒量（等熵定律）

$$p = C\rho^\gamma$$

这里的 $C = C(s_0)$ 由初始点的熵 s_0 决定，只要流动保持平滑，沿着路径的熵就是恒定的。反例：流体粒子在穿过激波时不满足上述规律。

3.3 守恒与非守恒形式

一维 Euler 方程组是典型的守恒律方程组，可以整理为如下的守恒形式

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0$$

其中守恒变量 $\mathbf{U} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ ，对应的变量称为原始变量。守恒变量与原始变量间的转换如下：

$$\xi_1 = \rho, \quad \xi_2 = \rho u, \quad \xi_3 = E$$

记 Jacobi 矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \nabla \mathbf{F}(\mathbf{U})$ （注意这里的求导是对守恒分量进行的），我们可以将方程改写为非守恒形式

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{U}_x = 0$$

Euler 方程组的 Jacobi 矩阵具体为

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & (3 - \gamma)u & \gamma - 1 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 1)u^3 - Hu & H - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix}$$

Euler 方程组是标准的双曲模型，Jacobi 矩阵可以进行相似对角化，我们将特征值记作 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ ，组成的对角阵记作

$$\Lambda(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - c & & \\ & u & \\ & & u + c \end{pmatrix}$$

Euler 方程组的（右）特征向量和左特征向量具体为

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{U}) & \mathbf{r}_2(\mathbf{U}) & \mathbf{r}_3(\mathbf{U}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u - c & u & u + c \\ H - uc & \frac{1}{2}u^2 & H + uc \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1(\mathbf{U}) \\ \mathbf{l}_2(\mathbf{U}) \\ \mathbf{l}_3(\mathbf{U}) \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}uc + \frac{1}{4}(\gamma - 1)u^2 & -\frac{1}{2}(\gamma - 1)u - \frac{1}{2}c & \frac{1}{2}(\gamma - 1) \\ c^2 - \frac{1}{2}(\gamma - 1)u^2 & (\gamma - 1)u & 1 - \gamma \\ -\frac{1}{2}uc + \frac{1}{4}(\gamma - 1)u^2 & -\frac{1}{2}(\gamma - 1)u + \frac{1}{2}c & \frac{1}{2}(\gamma - 1) \end{pmatrix}$$

Remark.（右）特征向量即满足 $\mathbf{A}\mathbf{r}_i = \lambda_i\mathbf{r}_i$ 的列向量，左特征向量即满足 $\mathbf{l}_i\mathbf{A} = \lambda_i\mathbf{l}_i$ 的行向量，易知 $\mathbf{L}\mathbf{R} = \mathbf{I}$ 。

最终可以得到 Jacobi 矩阵的对角化分解

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \mathbf{R}(\mathbf{U})\Lambda(\mathbf{U})\mathbf{L}(\mathbf{U})$$

守恒律方程组可以基于特征分解进行变形（注意到 $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{L}$ ）

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x &= 0 \\ \mathbf{U}_t + \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{L}\mathbf{U}_x &= 0 \\ \mathbf{L}\mathbf{U}_t + \mathbf{\Lambda}\mathbf{L}\mathbf{U}_x &= 0\end{aligned}$$

基于局部冻结系数的思想，在局部近似地将 $\mathbf{R}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{L}$ 视为常矩阵，那么我们就可以引入特征变量 $\mathbf{V} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ ，特征变量满足解耦的、线性化的方程组

$$\mathbf{V}_t + \mathbf{\Lambda}\mathbf{V}_x = 0$$

每一个特征分量分别满足一个线性方程

$$v_t^{(i)} + \lambda_i v_x^{(i)} = 0, (i = 1, 2, 3)$$

对于 Euler 方程组，可以理解为在 x 位置，存在三个波分别以速度 $u - c, u, u + c$ 进行传播，其中 u 是流体自身的速度，而 $c > 0$ 是流体中的声速。这里进行一个简单的分类讨论：

1. 流速始终保持 $|u| < c$ ，这是通常的情景，此时 $u - c < 0$ 视作向左传播， $u + c > 0$ 始终向右传播；
2. 流速始终保持 $|u| > c$ ，超声速情景，此时 $u - c, u, u + c$ 的传播方向都和 u 的方向相同，三个波同向传播；
3. 其它情形，即流速可能跨声速，此时的情景更加复杂，不做讨论。

3.4 边界条件

考虑一维有界区域 (x_l, x_r) 的 Euler 方程组，我们需要给予适定的边界条件：

1. 从方程组的角度，与边界处的三个特征值正负有关；
2. 从物理含义角度，与流体速度和声速的关系有关。

以左边界 $x = x_l$ 为例，我们根据 $x = x_l$ 处的特征值正负进行分类讨论，并且可以按照特征分量对应的波方程进行理解：

1. $0 < u - c \leq u \leq u + c$ ，三个波都是向右传播，需要三个边界条件；（超声速入口）
2. $u - c \leq 0 < u \leq u + c$ ，一个波向左传播，两个波向右传播，需要两个边界条件；（亚声速入口）
3. $u - c \leq u \leq 0 < u + c$ ，两个波向左传播，一个波向右传播，需要一个边界条件；（亚声速出口）
4. $u - c \leq u \leq u + c \leq 0$ ，三个波都是向左传播，不需要边界条件。（超声速出口）

对于右边界 $x = x_r$ ，类似可得：

1. $0 < u - c \leq u \leq u + c$ ，三个波都是向右传播，不需要边界条件；（超声速出口）
2. $u - c \leq 0 < u \leq u + c$ ，一个波向左传播，两个波向右传播，需要一个边界条件；（亚声速出口）
3. $u - c \leq u \leq 0 < u + c$ ，两个波向左传播，一个波向右传播，需要两个边界条件；（亚声速入口）

4. $u - c \leq u \leq u + c \leq 0$, 三个波都是向左传播, 需要三个边界条件。(超声速入口)

通过局部特征分解, 我们可以确定需要的边界条件个数。

为了简化问题, 我们假设流体的边界在任意时刻始终只处于一个固定的分类情景中, 通常给定守恒分量的精确值作为边界条件:

1. 如果 $x = x_l$ 需要一个边界条件, 给定第一个守恒分量的值

$$U^{(1)}(x_l, t) = \rho = g^{(1)}(t)$$

2. 如果 $x = x_l$ 需要两个边界条件, 给定前两个守恒分量的值

$$\begin{aligned} U^{(1)}(x_l, t) &= \rho = g^{(1)}(t) \\ U^{(2)}(x_l, t) &= \rho u = g^{(2)}(t) \end{aligned}$$

3. 如果 $x = x_l$ 需要三个边界条件, 给定所有守恒分量的值

$$\begin{aligned} U^{(1)}(x_l, t) &= \rho = g^{(1)}(t) \\ U^{(2)}(x_l, t) &= \rho u = g^{(2)}(t) \\ U^{(3)}(x_l, t) &= E = g^{(3)}(t) \end{aligned}$$

还有一些更复杂的情景, 给出的边界条件可能不是关于守恒变量的, 而是关于压强或者温度的约束, 或者边界类型随着时间变换等, 这里不做讨论。

3.5 精度测试算例

这里列出几个常见的验证数值格式的数值精度的经典算例。由于 Euler 方程组是非线性方程组, 一般情形下的解析解很难获取, 除了使用右端加源项的处理, 还可以考虑某些特殊的退化情形, 此时我们可以获取解析解或精确解。

例一 (线性方程)

计算区域 $\Omega = [x_l, x_r]$, 使用周期性边界条件, 初值和精确值为

$$\begin{cases} \rho(x, t) = \alpha + \beta \sin(\omega(x - u_0 t) + \phi) \\ u(x, t) = u_0 \\ p(x, t) = p_0 \end{cases}$$

其中的参数 $\alpha, \beta, \omega, \rho, u_0, p_0$ 可以自由选取, 要求 $\omega > 0$ 并且满足 $\omega(x_r - x_l) = 2\pi$ 。

由于物理上 $\rho \geq 0$, 因此必须保持 $\alpha > |\beta|$ 。计算可知声速为

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \in \left[\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\alpha + |\beta|}}, \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\alpha - |\beta|}} \right]$$

将其与常量 $u = u_0$ 比较, 得到三个特征值的正负, 通常可以选取

$$0 < u_0 < \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\alpha + |\beta|}}$$

使得下式恒成立

$$u - c < 0 < u < u + c$$

因此可以确定边界的类型。对于周期边界则不需要注意边界条件以及特征值的正负分类。

将此算例的初值或精确解代入 Euler 方程组可得

$$\begin{aligned}\rho_t + u_0 \rho_x &= 0 \\ u_0(\rho_t + u_0 \rho_x) &= 0 \\ \frac{1}{2}u_0^2(\rho_t + u_0 \rho_x) &= 0\end{aligned}$$

相当于全部退化为了同一个线性方程，因此可以获取解析解。

例二（Burgers 方程）

为了凑出一个退化为 Burgers 方程的特例，我们取常数 $\gamma = 3$ ，假设满足如下关系

$$\begin{cases} u(x, t) = \sqrt{3}\rho(x, t) \\ p(x, t) = \rho(x, t)^3 \end{cases}$$

代入可得

$$\begin{cases} \rho_t + (\sqrt{3}\rho^2)_x = 0 \\ \sqrt{3}(\rho^2)_t + 4(\rho^3)_x = 0 \\ 2(\rho^3)_t + 3\sqrt{3}(\rho^4)_x = 0 \end{cases}$$

整理易知，三个式子都等价于

$$\rho_t + 2\sqrt{3}\rho\rho_x = 0$$

这个式子就是 Burgers 方程的简单变形：取 $\rho = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mu$ 代换，得到

$$\mu_t + \mu\mu_x = 0$$

因此 $\mu(x, t)$ 就是 Burgers 方程的解，可以基于初值和特征线方法求得精确解。

我们可以基于 Burgers 方程的求解给出一组 Euler 方程组的精确解：取计算区域 $\Omega = [x_l, x_r]$ ，取 μ 满足三角函数初值的 Burgers 方程

$$\begin{cases} \mu_t + \left(\frac{\mu^2}{2}\right)_x = 0 \\ \mu(x, 0) = \alpha + \beta \sin(\omega x + \phi) \end{cases}$$

周期性边界条件，系数要求 $\omega > 0$ ，满足 $\omega(x_r - x_l) = 2\pi$ 。由此衍生出 Euler 方程组的初值和精确解

$$\begin{cases} \rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mu(x, t) \\ u(x, t) = \sqrt{3}\rho(x, t) = \frac{1}{2}\mu(x, t) \\ p(x, t) = \rho(x, t)^3 = \frac{1}{24\sqrt{3}}\mu(x, t)^3 \end{cases}$$

相应的最早出现间断的时刻 T_b 也根据 Burgers 方程来判断，使用 T_b 之前的时刻进行精度测试。

由于物理上要求 $\rho \geq 0$ ，因此 Burgers 方程的 μ 并不能是任意的，需要保持 $\mu(x, t) > 0$ 。关于边界的特征值处理则更加麻烦，计算可知声速为

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \frac{3\rho^3}{\rho} = 3\rho^2$$

因此恰有 $u = c$, 处处有

$$0 = u - c < u < u + c$$

也就是说其中一个特征值恒为零。

计算可得

$$u = \sqrt{3}\rho, \quad p = \rho^3, \quad E = 2\rho^3, \quad c = \sqrt{3}\rho, \quad H = 3\rho^2$$

此时

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & (3 - \gamma)u & \gamma - 1 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 1)u^3 - Hu & H - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3\rho^2 & 3\sqrt{3}\rho \end{pmatrix}$$

三个特征值为

$$\Lambda(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \sqrt{3}\rho & \\ & & 2\sqrt{3}\rho \end{pmatrix}$$

两个矩阵

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3}\rho & 2\sqrt{3}\rho \\ 0 & \frac{3}{2}\rho^2 & 6\rho^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}(\mathbf{U}) = \frac{1}{3\rho^2} \begin{pmatrix} 3\rho^2 & -\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho & 1 \\ 0 & 2\sqrt{3}\rho & -2 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\rho & 1 \end{pmatrix}$$

4 一维 Euler 方程组的 Riemann 问题

4.1 Riemann 问题介绍

对于无界计算区域 $x \in \mathbb{R}$, Riemann 问题指的是初值在 $x = 0$ 两侧取不同的常数值, 在 $x = 0$ 存在一个间断, 即

$$\mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_l, & x < 0 \\ \mathbf{U}_r, & x > 0 \end{cases}$$

此时双曲守恒律模型可能在 $x = 0$ 处产生激波 (shock wave), 稀疏波 (rarefaction wave), 接触间断 (contact discontinuity) 等复杂结构, 并且逐渐向两侧传播。在物理上, 激波也称为冲击波, 稀疏波也称为膨胀波。

Remark.

- 这里取 $x = 0$ 作为间断的初始位置只是为了分析的简便, 实际上间断可以设置在任意位置, 对应的解平移即可;
- 如果两侧流体的初始速度均为零, 称为激波管问题 (shock-tube problem), 激波管问题具有实际的物理实验背景, Riemann 问题可以视作它的推广;
- 在 Riemann 问题中只设置了一个初始间断, 就已经涉及了很多复杂结构, 如果我们设置多个初始间断, 不同的间断所产生的波会相互干扰, 产生更加复杂的结果。

4.2 初步分析与分类

Euler 方程组的三个特征值分别为

$$\lambda_1 = u - c$$

$$\lambda_2 = u$$

$$\lambda_3 = u + c$$

对应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{U}) & \mathbf{r}_2(\mathbf{U}) & \mathbf{r}_3(\mathbf{U}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u - c & u & u + c \\ H - uc & \frac{1}{2}u^2 & H + uc \end{pmatrix}$$

代数计算可得（需要注意这里的求导是针对守恒变量 $\mathbf{U} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T = (\rho, \rho u, E)^T$ 进行的）

$$\nabla \lambda_1(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{U}) = -\frac{1+\gamma}{2\xi_1}c \neq 0$$

$$\nabla \lambda_2(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{U}) = 0$$

$$\nabla \lambda_3(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{r}_3(\mathbf{U}) = \frac{1+\gamma}{2\xi_1}c \neq 0$$

上述计算表明：

1. 第一个和第三个特征场是本质非线性的（genuinely nonlinear），可能产生激波或稀疏波结构；
2. 第二个特征场是线性退化的（linearly degenerate），只可能产生接触间断。

一般情况下，Euler 方程组的 Riemann 问题精确解有以下四种情况：

1. 激波—接触间断—激波
2. 激波—接触间断—稀疏波
3. 稀疏波—接触间断—激波
4. 稀疏波—接触间断—稀疏波

如图 10

Remark. 接触间断通常的表现是两侧的密度不等，速度和压强相等，但是在分类讨论时接触间断也包括了两侧密度相等的“退化”情形；除了这四种情况，还有一些特殊情况，但是这里不做考虑。

4.3 具体计算

对于 Riemann 问题，记初始时刻两侧状态为

$$(\rho_l, u_l, p_l), \quad (\rho_r, u_r, p_r)$$

对于 Euler 方程组，由于第二个特征场是线性退化的，我们从此处切入进行求解，过程会比联列所有方程更加简单。求解过程大致包括如下步骤：

1. 首先在 (u, p) 相平面上分析，通过第一个和第三个特征场的 Hugoniot locus 和 Integral curves 确定交点所代表的两个中间状态的 u_* 和 p_* ，与此同时我们也确定了两侧分别是激波还是稀疏波；

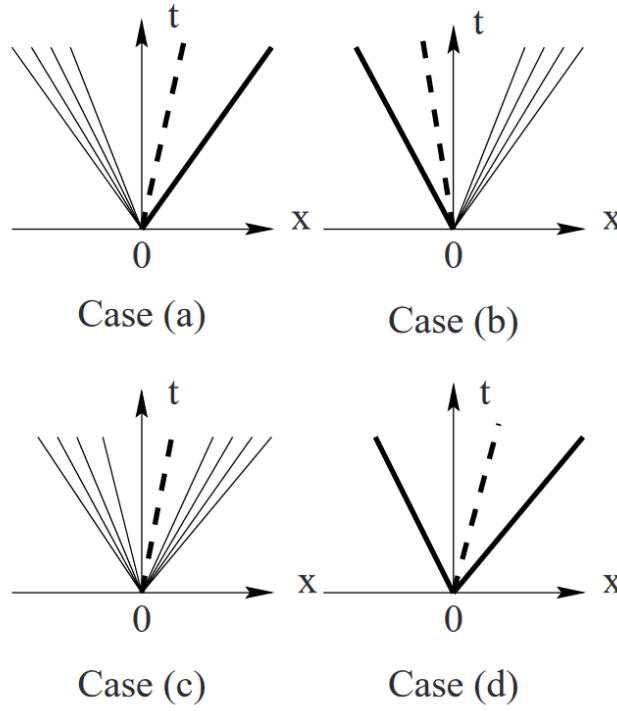


图 10: Euler 方程组的 Riemann 问题分类

2. 进一步确定接触间断两侧的 $\rho_{*,l}$ 和 $\rho_{*,r}$, 从而得到中间两个区域的完整状态;
3. 计算出波的传播速度, 对于激波和接触间断只需要记录一个速度, 对于稀疏波则需要记录波头和波尾的传播速度, 进而在任意时刻可以将求解区域划分为几个区域;
4. 对于稀疏波之外的区域我们已经得到了对应的所有状态, 对于稀疏波内部的状态我们还需要额外计算。

第一步

我们需要明确 Euler 方程组的第一个和第三个特征场的 Hugoniot locus 和 Integral curves 的具体表达式: 对于第一个和第三个特征场, Hugoniot locus 表达式依次为

$$S_1 : \tilde{u} = \hat{u} + \frac{2\hat{c}}{\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}} \frac{1 - \frac{\tilde{p}}{\hat{p}}}{\sqrt{1 + \alpha \frac{\tilde{p}}{\hat{p}}}}$$

$$S_3 : \tilde{u} = \hat{u} - \frac{2\hat{c}}{\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}} \frac{1 - \frac{\tilde{p}}{\hat{p}}}{\sqrt{1 + \alpha \frac{\tilde{p}}{\hat{p}}}}$$

对于第一个和第三个特征场, Integral curves 表达式依次为

$$R_1 : \tilde{u} = \hat{u} + \frac{2\hat{c}}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{\tilde{p}}{\hat{p}} \right)^\beta \right]$$

$$R_3 : \tilde{u} = \hat{u} - \frac{2\hat{c}}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{\tilde{p}}{\hat{p}} \right)^\beta \right]$$

这里的 $\hat{c}$ 代表对应状态的声速，常数 α 和 β 具体为

$$\alpha = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad \beta = \frac{\gamma-1}{2\gamma}$$

(u_l, p_l) 和 (u_r, p_r) 在 (u, p) 相空间所对应中间状态的 p_* 是如下非线性方程的零点：

$$\phi_l(p) = \phi_r(p)$$

其中

$$\phi_l(p) = \begin{cases} S_1(p) = u_l + \frac{2c_l}{\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}} \frac{1 - \frac{p}{p_l}}{\sqrt{1 + \alpha \frac{p}{p_l}}}, & (p \geq p_l) \\ R_1(p) = u_l + \frac{2c_l}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_l} \right)^\beta \right], & (p < p_l) \end{cases}$$

$$\phi_r(p) = \begin{cases} S_3(p) = u_r - \frac{2c_r}{\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}} \frac{1 - \frac{p}{p_r}}{\sqrt{1 + \alpha \frac{p}{p_r}}}, & (p \geq p_r) \\ R_3(p) = u_r - \frac{2c_r}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_r} \right)^\beta \right], & (p < p_r) \end{cases}$$

上述非线性方程只有在满足如下条件时有非负的零点

$$\frac{2}{\gamma-1}(c_l + c_r) > u_r - u_l$$

这个条件被称为正压力条件 (pressure positivity condition)，如果不满足此条件，在物理上的解释是中心区域会出现空洞，本文不考虑这类情况的求解。

我们需要为非线性方程求根提供一个足够好的初值，一个可选的策略如下，首先计算

$$p_{(pv)} = \frac{1}{2}(p_l + p_r) - \frac{1}{8}(u_r - u_l)(\rho_l + \rho_r)(c_l + c_r)$$

为了保证非负性，可以取

$$p_0 = \max(p_{(pv)}, \varepsilon)$$

在求解得到 p_* 之后，直接代入就可以得到 u_*

$$u_* = \phi_l(p_*) = \phi_r(p_*)$$

考虑数值误差的影响，也可以取为两侧的算术平均

$$u_* = \frac{1}{2}(\phi_l(p_*) + \phi_r(p_*))$$

可以直接基于 p_* 来判断左右两个波的类型：

- 若 $p_* \geq p_l$ ，则左侧为激波，反之为稀疏波；
- 若 $p_* \geq p_r$ ，则右侧为激波，反之为稀疏波。

在很多计算流体的教材中，对这个问题的分析采用是另一套等价的记号，也将其记录在下面，便于查阅。

定义函数

$$f(p; p_i, \rho_i) = \begin{cases} \frac{p - p_i}{\rho_i c_i \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{p}{p_i} \right) + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right]^{\frac{1}{2}}} & (p \geq p_i) \\ \frac{2c_i}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] & (p < p_i) \end{cases}$$

得到非线性方程

$$f(p_*; p_l, \rho_l) + f(p_*; p_r, \rho_r) = u_l - u_r$$

中间状态的压强 p_* 就是此方程的零点，对应中间状态的速度可以取为平均值

$$u_* = \frac{1}{2}(u_l + u_r) + \frac{1}{2}[f(p_*; p_r, \rho_r) - f(p_*; p_l, \rho_l)]$$

定义

$$F(p) = f(p; p_l, \rho_l) + f(p; p_r, \rho_r)$$

那么正压力条件就变成了

$$u_l - u_r > F(0)$$

本文仍然默认这个条件，忽略存在空洞的情况。

事实上，我们无需求解非线性方程，就可以利用单调性判断 Riemann 解的具体分类，判断细则如下：

1. $p_l \geq p_r$

- (a) 当 $F(0) < u_l - u_r < F(p_r)$ ，对应情况为：稀疏波—接触间断—稀疏波
- (b) 当 $F(p_r) < u_l - u_r < F(p_l)$ ，对应情况为：稀疏波—接触间断—激波
- (c) 当 $F(p_l) < u_l - u_r$ ，对应情况为：激波—接触间断—激波

2. $p_l < p_r$

- (a) 当 $F(0) < u_l - u_r < F(p_l)$ ，对应情况为：稀疏波—接触间断—稀疏波
- (b) 当 $F(p_l) < u_l - u_r < F(p_r)$ ，对应情况为：激波—接触间断—稀疏波
- (c) 当 $F(p_r) < u_l - u_r$ ，对应情况为：激波—接触间断—激波

第二步

现在我们关注中间部分的密度，接触间断两侧的密度是允许不同的，记作 $\rho_{*,l}$ 和 $\rho_{*,r}$ ，对于它们的计算需要分别结合两侧的状态进行。

对于稀疏波连接的情况，我们可以通过等熵条件 $p = C\rho^\gamma$ 来获得：

1. 如果第一个波是稀疏波，那么 $\rho_{*,l}$ 可以通过下式计算

$$\rho_{*,l} = \rho_l \left(\frac{p_*}{p_l} \right)^{1/\gamma}$$

2. 如果第三个波是稀疏波，那么 $\rho_{*,r}$ 可以通过下式计算

$$\rho_{*,r} = \rho_r \left(\frac{p_*}{p_r} \right)^{1/\gamma}$$

对于激波连接的情况，密度显然是通过代入 RH 条件得到的方程组解得的，可以使用下面这组公式计算：

1. 如果第一个波是激波，那么 $\rho_{*,l}$ 可以通过下式计算

$$\rho_{*,l} = \rho_l \left(\frac{1 + \alpha \frac{p_*}{p_l}}{\alpha + \frac{p_*}{p_l}} \right), \quad \alpha = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$

2. 如果第三个波是激波，那么 $\rho_{*,r}$ 可以通过下式计算

$$\rho_{*,r} = \rho_r \left(\frac{1 + \alpha \frac{p_*}{p_r}}{\alpha + \frac{p_*}{p_r}} \right), \quad \alpha = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$

对于相应波为激波的分支，也可以通过下面这组公式计算，首先定义

$$A_i = \rho_i c_i \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p_*}{p_i} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right]^{\frac{1}{2}}$$

密度对应为

$$\rho_{*,l} = \frac{\rho_l A_l}{A_l - \rho_l (u_l - u_*)}$$

$$\rho_{*,r} = \frac{\rho_r A_r}{A_r + \rho_r (u_r - u_*)}$$

第三步

我们需要确定三个波的传播速度，将第 i 个波的传播速度记作 w_i 。（对于稀疏波，记两端的传播速度为 $w_{i,l}$ 和 $w_{i,r}$ ）

对于第二个波，因为是接触间断，显然有

$$w_2 = u_*$$

对于稀疏波连接的情况，波头和波尾的传播速度为当地的对应特征值：（还需要计算当地的声速）

1. 如果第一个波是稀疏波，那么波头和波尾的传播速度为

$$w_{1,l} = u_l - c_l,$$

$$w_{1,r} = u_* - c_{*,l}$$

2. 如果第三个波是稀疏波，那么波头和波尾的传播速度为

$$w_{3,l} = u_{*,r} + c_{*,r},$$

$$w_{3,r} = u_r + c_r$$

对于激波连接的情况，我们可以直接通过 RH 跳跃条件计算传播速度：

1. 如果第一个波是激波，那么传播速度为

$$w_1 = \frac{\rho_l u_l - \rho_{*,l} u_*}{\rho_l - \rho_{*,l}}$$

2. 如果第三个波是激波，那么传播速度为

$$w_3 = \frac{\rho_r u_r - \rho_{*,r} u_*}{\rho_r - \rho_{*,r}}$$

激波速度也可以通过如下两个公式直接计算

$$\begin{aligned} w_1 &= u_l - \frac{A_l}{\rho_l} \\ w_3 &= u_r + \frac{A_r}{\rho_r} \end{aligned}$$

其中 A_i 的定义见上文。

第四步

我们最后需要完成的是稀疏波内部的状态计算，我们需要借助一些等式/不变量来推导。
假设第一个波为稀疏波，那么

1. 第一个关系是广义 Riemann 不变量

$$u + \frac{2c}{\gamma - 1} = u_l + \frac{2c_l}{\gamma - 1}$$

2. 第二个关系是等熵关系（熵也可以理解为第二个广义 Riemann 不变量）

$$p = C\rho^\gamma \Rightarrow \frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_l}{\rho_l^\gamma}, \quad \frac{c^{2\gamma}}{p^{\gamma-1}} = \frac{c_l^{2\gamma}}{p_l^{\gamma-1}}$$

具体推导过程：由于特征线从 $x = 0$ 发出，有

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} = u - c$$

再利用 Riemann 不变量可以得到 c 的表达式

$$c = c(x, t) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(u_l - \frac{x}{t} \right) + \frac{2}{\gamma + 1} c_l$$

因此有

$$u = u(x, t) = c(x, t) + \frac{x}{t} = \frac{2}{\gamma + 1} \left[c_l + \frac{\gamma - 1}{2} u_l + \frac{x}{t} \right]$$

然后利用等熵关系，通过如下公式计算密度和压强

$$p = p_l \left(\frac{c}{c_l} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad \rho = \rho_l \left(\frac{p}{p_l} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

对于第三个波为稀疏波的推导完全类似，只需要作出如下修改：特征线为

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} = u + c$$

Riemann 不变量为

$$u - \frac{2c}{\gamma - 1} = u_r - \frac{2c_r}{\gamma - 1}$$

最终可以整理得到如下的计算公式：

1. 如果第一个波是稀疏波, 对应的传播区域为 $[w_{1,l}t, w_{1,r}t]$, 在稀疏波内部的状态为

$$W_{Lfan} = \begin{cases} \rho = \rho_l \left[\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)c_l} \left(u_l - \frac{x}{t} \right) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}} \\ u = \frac{2}{\gamma+1} \left[c_l + \frac{\gamma-1}{2} u_l + \frac{x}{t} \right] \\ p = p_l \left[\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)c_l} \left(u_l - \frac{x}{t} \right) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \end{cases}$$

2. 如果第三个波是稀疏波, 对应的传播区域为 $[w_{3,l}t, w_{3,r}t]$, 在稀疏波内部的状态为

$$W_{Rfan} = \begin{cases} \rho = \rho_r \left[\frac{2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)c_r} \left(u_r - \frac{x}{t} \right) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}} \\ u = \frac{2}{\gamma+1} \left[-c_r + \frac{\gamma-1}{2} u_r + \frac{x}{t} \right] \\ p = p_r \left[\frac{2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)c_r} \left(u_r - \frac{x}{t} \right) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \end{cases}$$

对于稀疏波内部状态的计算, 其实有很多等价的公式可选, 例如下面这组公式也是可以的:

1. 如果第一个波是稀疏波, 对应的传播区域为 $[w_{1,l}t, w_{1,r}t]$, 在稀疏波内部的状态为

$$W_{Lfan} = \begin{cases} u = \frac{2}{\gamma+1} \left[c_l + \frac{\gamma-1}{2} u_l + \frac{x}{t} \right] \\ \rho = \left[\frac{\rho_l^\gamma (u - \frac{x}{t})^2}{\gamma p_l} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ p = p_l \left(\frac{\rho}{\rho_l} \right)^\gamma \end{cases}$$

2. 如果第三个波是稀疏波, 对应的传播区域为 $[w_{3,l}t, w_{3,r}t]$, 在稀疏波内部的状态为

$$W_{Rfan} = \begin{cases} u = \frac{2}{\gamma+1} \left[-c_r + \frac{\gamma-1}{2} u_r + \frac{x}{t} \right] \\ \rho = \left[\frac{\rho_r^\gamma (\frac{x}{t} - u)^2}{\gamma p_r} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ p = p_r \left(\frac{\rho}{\rho_r} \right)^\gamma \end{cases}$$

4.4 Riemann 问题算例

Example 4.1 (Sod 问题).

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1) & x < 0.5 \\ (0.125, 0, 0.1) & x > 0.5 \end{cases}, \quad T = 0.25$$

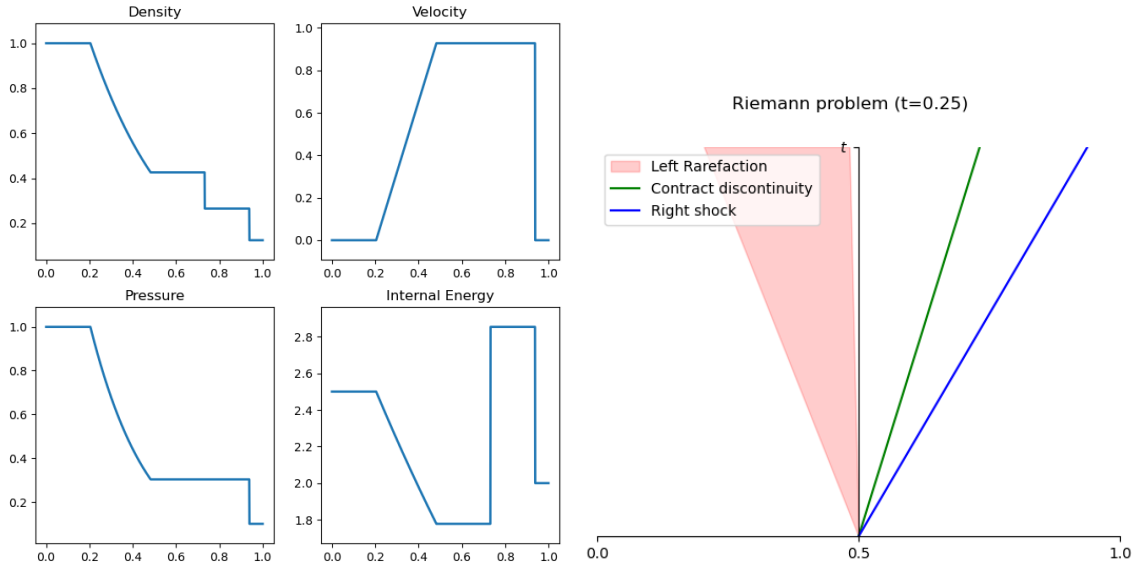


图 11: Riemann 问题算例 4.1

Example 4.2.

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, -2, 0.4) & x < 0.5 \\ (1, 2, 0.4) & x > 0.5 \end{cases}, \quad T = 0.15$$

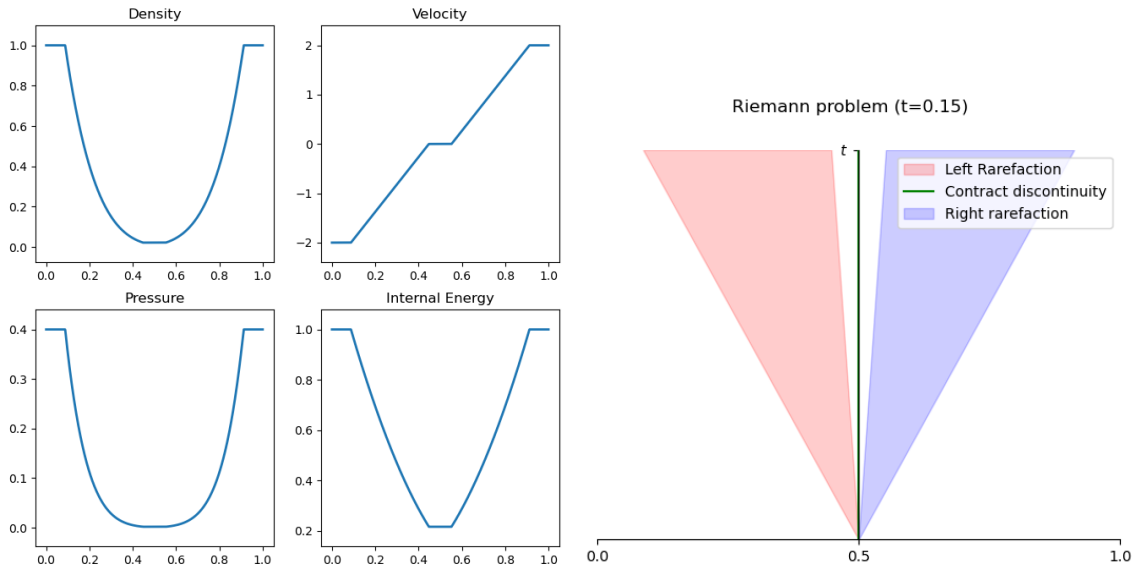


图 12: Riemann 问题算例 4.2

Example 4.3.

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1000) & x < 0.5 \\ (1, 0, 0.01) & x > 0.5 \end{cases}, \quad T = 0.012$$

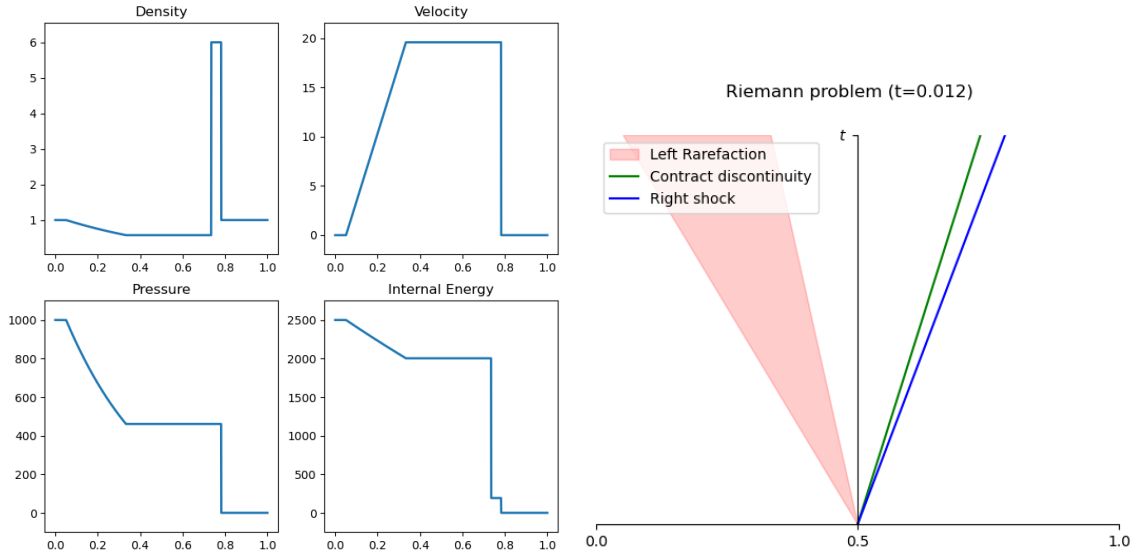


图 13: Riemann 问题算例 4.3

Example 4.4.

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 0.01) & x < 0.5 \\ (1, 0, 100) & x > 0.5 \end{cases}, \quad T = 0.035$$

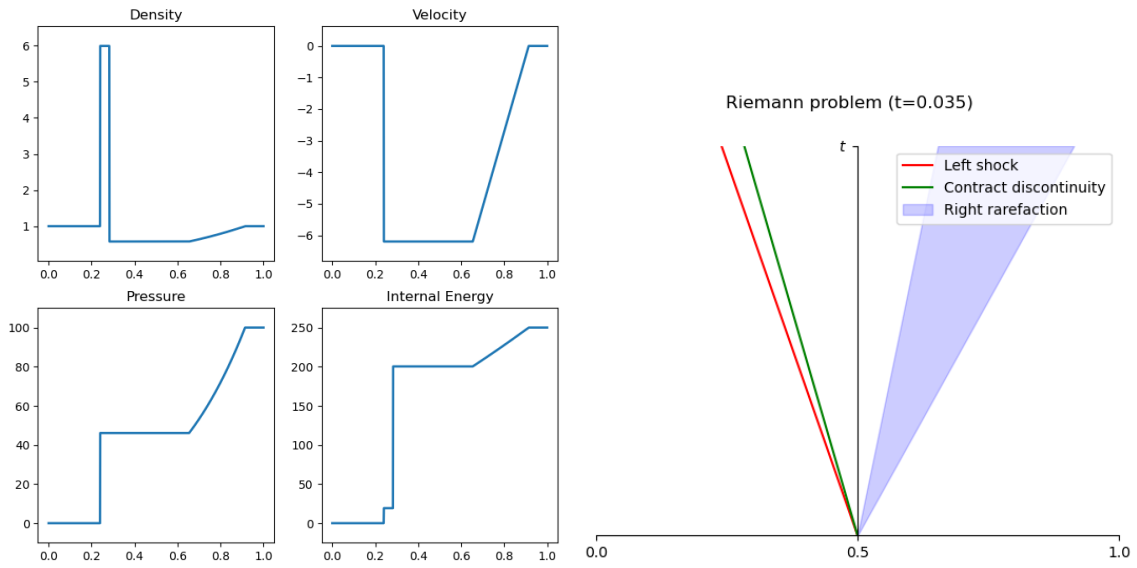


图 14: Riemann 问题算例 4.4

Example 4.5.

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (5.99924, 19.5975, 460.894) & x < 0.5 \\ (5.99242, -6.19633, 46.0950) & x > 0.5 \end{cases}, \quad T = 0.035$$

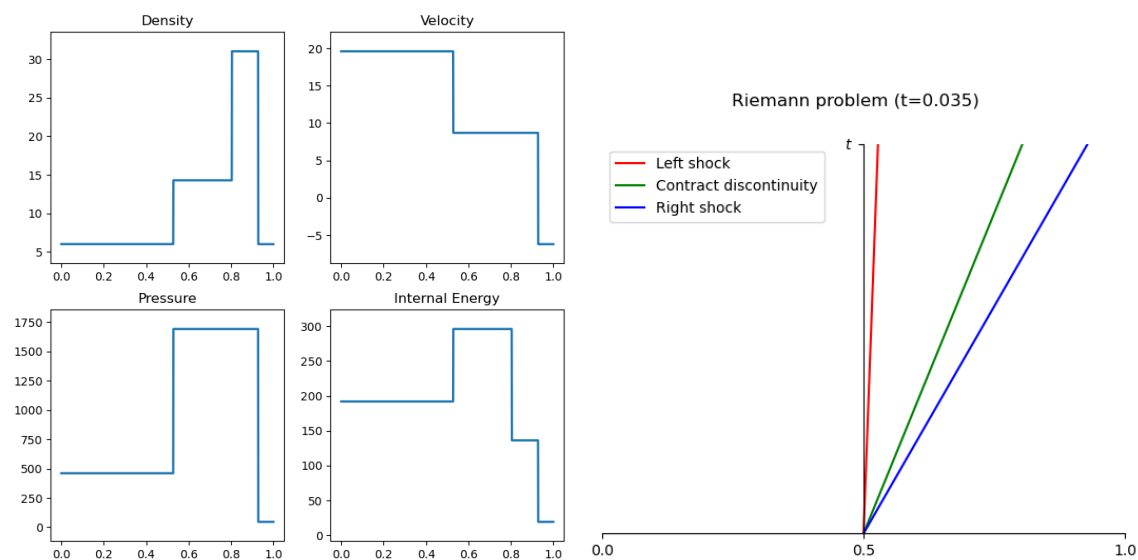


图 15: Riemann 问题算例 4.5

Example 4.6 (Lax 问题).

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (0.445, 0.698, 3.528) & x < 0 \\ (0.5, 0, 0.571) & x > 0 \end{cases}, \quad T = 0.2$$

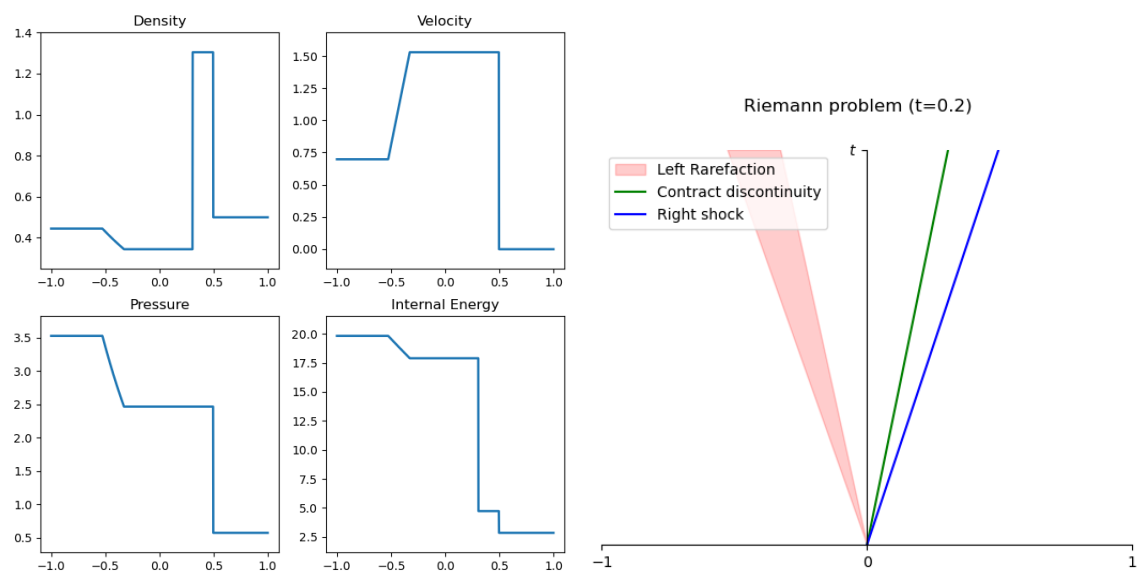


图 16: Riemann 问题算例 4.6

Example 4.7.

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 3, 1) & x < 0 \\ (1, -3, 1) & x > 0 \end{cases}, \quad T = 0.4$$

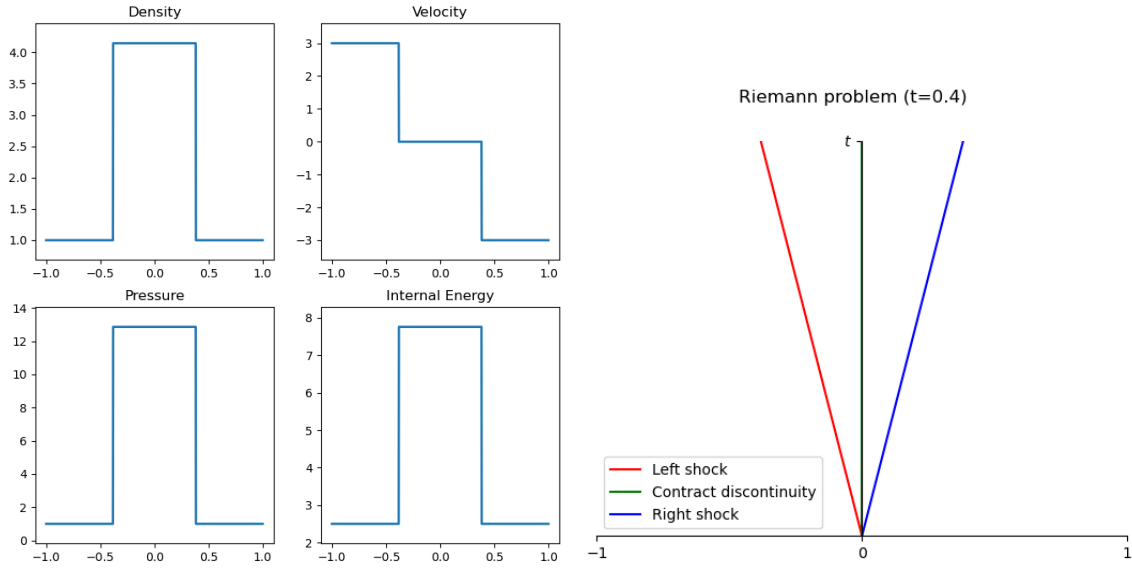


图 17: Riemann 问题算例 4.7

4.5 参考资料

1. 教材: Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics (Third Edition) Toro, 大部分公式在第四章;
2. 计算流体力学讲义 (李新亮): 双曲型方程组及间断解, 部分公式推导参考了这一节讲义;
3. 一份 Gist 上的参考代码

A 双曲方程组笔记

下面的定义和讨论是针对一般的一维非线性双曲方程组进行的

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0$$

其中自变量为

$$\mathbf{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$$

双曲方程组保证 $\nabla \mathbf{F}$ 具有完备的特征系统, 我们记特征值和对应的特征向量为

$$\lambda_p(\mathbf{U}), \mathbf{r}(\mathbf{U}), (p = 1, \dots, n)$$

我们引入本质非线性 (genuinely nonlinear) 和线性退化 (linearly degenerate) 两个针对特征场的定义:

- 称第 p 个特征场是本质非线性的, 如果始终满足: $\nabla \lambda_p(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{r}(\mathbf{U}) \neq 0$;
- 称第 p 个特征场是线性退化的, 如果始终满足: $\nabla \lambda_p(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{r}(\mathbf{U}) = 0$ 。

Remark. 这两个要求在退化到标量问题 $u_t + f(u)_x = 0$ 时, 第一个要求对应 f 为严格凸/严格凹函数, 第二个要求对应 f 为线性函数。对于标量问题, 我们还可以针对非凸非凹的一般 f 进行分析, 但是对于非线性方程组问题过于复杂, 我们只讨论这两种典型的特殊情形。

一个典型的例子是常系数问题 $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{A}\mathbf{U}$ ，此时所有的特征场都是线性退化的。

双曲方程组的一个特点就是无论初值和边界的正则性有多好，随着时间的演化，精确解的正则性都可能很糟糕，例如可能产生间断。我们通常将间断分成两类：

1. 强间断：函数值不连续，例如激波和接触间断；
2. 弱间断：函数值连续，但是导数值不连续，例如稀疏波的波头和波尾。

Hugoniot locus

固定一个起始状态 $\hat{\mathbf{U}}$ ，如果另一个不同的状态 $\tilde{\mathbf{U}}$ 与之直接相连，那么根据守恒性质可得，必然满足如下的 Rankine-Hugoniot 跳跃条件

$$[\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{U}}) - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}})] = s [\tilde{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{U}}]$$

这里 s 是间断的移动速度。

为了更清晰地刻画所有可以间断直接相连的状态对，我们基于起始状态 $\hat{\mathbf{U}}$ 定义如下的 n 族参数曲线（称为 Hugoniot curve）与对应的标量值函数

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}_p = \tilde{\mathbf{U}}_p(\theta; \hat{\mathbf{U}}) \\ s_p = s_p(\theta; \hat{\mathbf{U}}) \end{cases}$$

其中 $p = 1, \dots, n$ 分别对应 n 个特征场，满足如下的 Rankine-Hugoniot 关系

$$[\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{U}}_p(\theta; \hat{\mathbf{U}})) - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}})] = s_p(\theta; \hat{\mathbf{U}}) [\tilde{\mathbf{U}}_p(\theta; \hat{\mathbf{U}}) - \hat{\mathbf{U}}]$$

以及初值关系

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}_p(0; \hat{\mathbf{U}}) = \hat{\mathbf{U}} \\ \partial_\theta \tilde{\mathbf{U}}_p(0; \hat{\mathbf{U}}) = \mathbf{r}_p(\hat{\mathbf{U}}) \\ s_p(0; \hat{\mathbf{U}}) = \lambda_p(\hat{\mathbf{U}}) \end{cases}$$

这里的初值必须取为 $\nabla \mathbf{F}$ 的特征系统，否则与上面的条件矛盾。所有的 n 条曲线代表的状态集合统称为 Hugoniot locus。

一个最简单的例子是常系数问题 $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{A}\mathbf{U}$ ，此时 Hugoniot curve 的表达式为

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}_p(\theta; \hat{\mathbf{U}}) = \hat{\mathbf{U}} + \theta \mathbf{r}_p \\ s_p(\theta; \hat{\mathbf{U}}) = \lambda_p \end{cases}$$

其中 λ_p 和 $\mathbf{r}_p$ 在每个状态的取值都是一样的。这里我们得到实际上是相空间中从起点发出的 n 条直线，对于一般的非线性问题，相应的结果则是 n 条曲线。

根据 Hugoniot locus 的定义可知：一个状态 $\tilde{\mathbf{U}}$ 位于参考状态 $\hat{\mathbf{U}}$ 发出的某一条 Hugoniot curve 之上，等价于两者可以直接相连，此时得到的解是满足守恒性的弱解。

需要注意的是：

1. Hugoniot curve 是与起点状态有关的曲线（族）：若 $\tilde{\mathbf{U}}$ 位于 $\hat{\mathbf{U}}$ 发出的某一条 Hugoniot curve 之上，这条曲线虽然经过点 $\tilde{\mathbf{U}}$ ，但是通常并不是从 $\tilde{\mathbf{U}}$ 发出的 Hugoniot curve；
2. Hugoniot curve 连接关系满足对称性：若 $\tilde{\mathbf{U}}$ 位于 $\hat{\mathbf{U}}$ 发出的第 p 条 Hugoniot curve 之上，那么反过来 $\hat{\mathbf{U}}$ 也位于 $\tilde{\mathbf{U}}$ 发出的第 p 条 Hugoniot curve 之上，但是两条 Hugoniot curve 不是重合的，只是至少有两个交点对应这里的两个状态；
3. Hugoniot curve 连接关系通常不具有传递性：若 $\mathbf{U}_1$ 与 $\mathbf{U}_2$ 通过 Hugoniot curve 相连， $\mathbf{U}_2$ 与 $\mathbf{U}_3$ 通过 Hugoniot curve 相连，我们无法保证 $\mathbf{U}_1$ 与 $\mathbf{U}_3$ 通过 Hugoniot curve 相连。

Entropy condition

前文提到的 Rankine-Hugoniot 跳跃条件和 Hugoniot locus 只能保证间断满足局部守恒性，对应的解是弱解，但是无法保证对应的解是熵解。

考虑通过第 p 条 Hugoniot curve 连接的间断解，设其左右侧状态为 $\mathbf{U}_L$ 与 $\mathbf{U}_R$ ，传播速度为 s ，有以下结论：

1. 如果第 p 个特征场是本质非线性的，那么这个间断解满足熵条件当且仅当下式成立

$$\lambda_p(\mathbf{U}_L) > s > \lambda_p(\mathbf{U}_R)$$

2. 如果第 p 个特征场是线性退化的，相应的条件变为

$$\lambda_p(\mathbf{U}_L) = s = \lambda_p(\mathbf{U}_R)$$

在满足 Rankine-Hugoniot 跳跃条件和熵条件的前提下，本质非线性的特征场所对应的间断解通常被称为激波，线性退化的特征场所对应的间断解通常被称为接触间断。

Integral curves

积分曲线 (Integral curve) 是相空间中的 n 族参数曲线：

$$\mathbf{U}_p = \mathbf{U}_p(\theta)$$

满足条件：曲线在每个点的切向量平行于对应的特征向量

$$\partial_\theta \mathbf{U}_p(\theta) // \mathbf{r}_p(\mathbf{U}_p(\theta))$$

Remark. 与 Hugoniot curve 不同，积分曲线的定义与起点无关，积分曲线连接关系具有对称性和传递性。