

有限元逼近与插值误差估计

Shun Li

Jul 25, 2025

主要参考《偏微分方程数值方法-武海军》。

第一部分

1 Peetre-Tartar 引理

下面给出一个一般形式的 Peetre-Tartar 引理。

Lemma 1.1. 设 X, Y, Z 是 Banach 空间,

$$A \in \mathcal{L}(X, Y), \quad T \in \mathcal{L}(X, Z),$$

其中 T 是紧算子。若存在常数 $C_0 > 0$, 使得

$$\|v\|_X \leq C_0 (\|Av\|_Y + \|Tv\|_Z), \quad \forall v \in X,$$

则:

1. $\ker A$ 是有限维子空间;
2. (商空间估计) 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\text{dist}(v, \ker A) := \inf_{w \in \ker A} \|v - w\|_X \leq C \|Av\|_Y, \quad \forall v \in X.$$

或者等价得, $\text{Ran}(A)$ 是 Y 的闭子空间。

Proof. 由于 A 连续, $\ker A$ 是 X 的闭子空间。首先证明 $\ker A$ 是有限维的。设 $\{v_n\} \subset \ker A$ 是单位闭球中的任意序列, 即 $\|v_n\|_X \leq 1$ 。由于 T 是紧算子, 可以取一个子列, 不妨仍记为 $\{v_n\}$, 使得 $\{Tv_n\}$ 在 Z 中收敛。由假设中的不等式保证 $\{v_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列, 从而在 X 中收敛。因此, $\ker A$ 的单位闭球是紧的。由赋范空间有限维性的刻画, $\ker A$ 是有限维空间。

下面证明商空间估计。反设结论不成立, 则存在序列 $\{v_n\} \subset X$, 使得

$$\text{dist}(v_n, \ker A) = 1, \quad \|Av_n\|_Y < \frac{1}{n}.$$

根据下确界的定义, 存在序列 $\{w_n\} \subset \ker A$, 使得

$$\|v_n - w_n\|_X \leq 2.$$

记 $u_n := v_n - w_n$, 显然有

$$Au_n = Av_n, \quad \text{dist}(u_n, \ker A) = \text{dist}(v_n, \ker A) = 1.$$

因此, 我们得到了一个有界序列 $\{u_n\} \subset X$, 满足

$$\|u_n\|_X \leq 2, \quad \text{dist}(u_n, \ker A) = 1, \quad \|Au_n\|_Y < \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

由于 T 是紧算子, 因此可以从有界序列 $\{u_n\}$ 取一个子列, 仍记为 $\{u_n\}$, 使得 $\{Tu_n\}$ 在 Z 中收敛。利用引理的不等式条件以及 $\{Au_n\}$ 在 Y 中收敛到 0、 $\{Tu_n\}$ 在 Z 中收敛可得 $\{u_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列。由 X 的完备性, $\{u_n\}$ 有极限 $u_n \rightarrow u \in X$ 。由 A 的连续性和 $\{Au_n\}$ 在 Y 中收敛到 0 可得

$$Au = \lim_{n \rightarrow \infty} Au_n = 0, \quad \Rightarrow \quad u \in \ker A, \quad \text{dist}(u, \ker A) = 0.$$

但是点到闭子空间的距离函数 dist 是 1-Lipschitz 连续的

$$\text{dist}(u, \ker A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(u_n, \ker A) = 1.$$

矛盾。因此商空间估计成立。 □

Remark 1.1 (A 单射时的 Peetre-Tartar 引理). 当 A 是单射时, $\ker A = \{0\}$, 商空间 $X/\ker A$ 可以自然地与 X 等同。此时上述结论中的商空间估计退化为

$$\|v\|_X \leq C\|Av\|_Y, \quad \forall v \in X.$$

Remark 1.2. 这里补充说明商空间估计与 “ $\text{Ran}(A)$ 是闭子空间” 的等价性。定义诱导算子

$$\tilde{A}: X/\ker A \rightarrow \text{Ran}(A), \quad \tilde{A}(v + \ker A) := Av.$$

则 $\tilde{A}$ 总是良定义的连续线性双射。

1. 假设商空间估计成立, 易得 $\tilde{A}^{-1}$ 有界, 故

$$\tilde{A}: X/\ker A \rightarrow \text{Ran}(A)$$

是拓扑同构。由于 $X/\ker A$ 是 Banach 空间, $\text{Ran}(A)$ 在 Y 所诱导的范数下也是 Banach 空间, 于是 $\text{Ran}(A)$ 是 Y 的闭子空间。

2. 反之, 若 $\text{Ran}(A)$ 是 Y 的闭子空间, 它配备从 Y 继承的范数后是 Banach 空间。因此 $\tilde{A}$ 是两个 Banach 空间之间的连续线性双射。由有界逆定理,

$$\tilde{A}^{-1}: \text{Ran}(A) \rightarrow X/\ker A$$

是有界线性算子, 这就是商空间估计中的不等式。

Remark 1.3. Peetre-Tartar 引理的一般形式同时给出了

$$\dim \ker A < \infty, \quad \text{Ran}(A) \text{ 是闭的.}$$

换言之, A 是一个上半 Fredholm 算子。

2 一些关于范数等价的命题

对于 Banach 空间 X, Y 之间的有界线性算子 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, 定义

$$|v|_{X, (A)} := \|Av\|_Y,$$

则 $|\cdot|_{X, (A)}$ 是 X 上的连续半范数, 并且

$$\{v \in X : |v|_{X, (A)} = 0\} = \ker A.$$

因此 $|\cdot|_{X, (A)}$ 在同一等价类上的取值相同, 因而在 $X/\ker A$ 上良定义, 并且可以成为范数, 不妨称为 A 诱导的范数, 记作

$$\|\hat{v}\|_{X/\ker A, (A)} := \|Av\|_Y,$$

下面的命题说明, A 诱导的范数在一定条件下与 $X/\ker A$ 的自然商范数等价。而这里需要的条件恰好可以由 Peetre–Tartar 引理给出。

Proposition 2.1 (商空间上的范数等价). 设 X, Y 是 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, 在 $X/\ker A$ 定义自然商范数

$$\|\hat{v}\|_{X/\ker A} := \inf_{w \in \ker A} \|v - w\|_X$$

以及由 A 诱导的范数

$$\|\hat{v}\|_{X/\ker A, (A)} := \|Av\|_Y,$$

那么两个范数等价当且仅当 $\text{Ran}(A)$ 闭, 亦即: 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\inf_{w \in \ker A} \|v - w\|_X \leq C \|Av\|_Y, \quad \forall v \in X.$$

Proof. 条件中的不等式实际上直接给出了两个范数之间的一个方向的控制

$$\|\hat{v}\|_{X/\ker A} \leq C \|\hat{v}\|_{X/\ker A, (A)}, \quad \forall v \in X.$$

另一个方向的控制则由 A 的有界性保证:

$$\|\hat{v}\|_{X/\ker A, (A)} = \|Av\|_Y = \|A(v - w)\|_Y \leq \|A\| \|v - w\|_X, \quad \forall w \in \ker A.$$

对 $w \in \ker A$ 取 $\inf$ 即可得证。□

这个命题关注的是商空间的范数等价关系, 其实只要再加入一个能够控制 $\ker A$ 的量, 就可以补成 X 上的等价范数。

Proposition 2.2 (核补偿下的等价范数). 设 X, Y, W 是 Banach 空间,

$$A \in \mathcal{L}(X, Y), \quad B \in \mathcal{L}(X, W),$$

假设存在常数 $C_A > 0$, 使得商空间估计

$$\inf_{w \in \ker A} \|v - w\|_X \leq C_A \|Av\|_Y, \quad \forall v \in X$$

成立。再假设 B 能够控制 $\ker A$ 中的方向, 即存在常数 $C_N > 0$, 使得

$$\|w\|_X \leq C_N \|Bw\|_W, \quad \forall w \in \ker A.$$

则

$$\|v\|_{A,B} := \|Av\|_Y + \|Bv\|_W$$

给出了 X 上的范数, 并且与原范数 $\|\cdot\|_X$ 等价。

Proof. 先说明 $\|\cdot\|_{A,B}$ 是范数: 若

$$\|Av\|_Y + \|Bv\|_W = 0,$$

则 $v \in \ker A$ 且 $Bv = 0$, 由 B 在 $\ker A$ 上的控制性可得 $v = 0$ 。其余范数公理显然成立。

由 A 和 B 的有界性易得

$$\|Av\|_Y + \|Bv\|_W \leq (\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \|B\|_{\mathcal{L}(X,W)}) \|v\|_X.$$

因此只需证明另一个方向的控制。

任取 $v \in X$ 和 $\varepsilon > 0$ 。根据距离的定义和商空间估计, 可以取 $w \in \ker A$, 使得

$$\|v - w\|_X \leq \inf_{w \in \ker A} \|v - w\|_X + \varepsilon \leq C_A \|Av\|_Y + \varepsilon$$

因为 $w \in \ker A$, 由 B 在 $\ker A$ 上的控制性,

$$\|w\|_X \leq C_N \|Bw\|_W = C_N \|Bv - B(v - w)\|_W \leq C_N \|Bv\|_W + C_N \|B\|_{\mathcal{L}(X,W)} \|v - w\|_X.$$

因此

$$\begin{aligned} \|v\|_X &\leq \|v - w\|_X + \|w\|_X \\ &\leq (1 + C_N \|B\|_{\mathcal{L}(X,W)}) \|v - w\|_X + C_N \|Bv\|_W \\ &\leq (1 + C_N \|B\|_{\mathcal{L}(X,W)}) (C_A \|Av\|_Y + \varepsilon) + C_N \|Bv\|_W. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得到

$$\|v\|_X \leq C (\|Av\|_Y + \|Bv\|_W).$$

因此两个范数等价。 □

Remark 2.1. 上述命题中实际要求的是 B 在 $\ker A$ 上有下界, 即

$$\|w\|_X \leq C_N \|Bw\|_W, \quad \forall w \in \ker A.$$

换言之, 要求限制算子 $B|_{\ker A}$ 应当是单射且具有闭值域。若 $\ker A$ 是有限维空间, 则条件可以简化为 $B|_{\ker A}$ 是单射。因为在有限维空间 $\ker A$ 上,

$$w \mapsto \|Bw\|_W$$

是一个范数, 因此它与 $\ker A$ 上原有的范数等价, 存在 $C_N > 0$, 使得

$$\|w\|_X \leq C_N \|Bw\|_W, \quad \forall w \in \ker A.$$

最直接的核补偿方式是将 v 在 $\ker A$ 中的分量显式加入范数。

Corollary 2.3 (利用投影构造等价范数). 设 X, Y 是 *Banach* 空间, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. 假设商空间估计

$$\inf_{w \in \ker A} \|v - w\|_X \leq C_A \|Av\|_Y, \quad \forall v \in X$$

成立. 若存在有界线性投影 $P: X \rightarrow \ker A$, 即 P 满足

$$P^2 = P, \quad \text{Ran}(P) = \ker A,$$

则

$$\|v\|_{A,P} := \|Av\|_Y + \|Pv\|_X$$

是 X 上与原范数等价的范数。

Remark 2.2. 投影 P 给出了直和分解

$$X = \ker P \oplus \ker A.$$

其中 $v - Pv \in \ker P$ 是商空间方向, $Pv \in \ker A$ 是核空间方向. 算子 A 控制前者, 投影 P 控制后者,

$$\|Av\|_Y + \|Pv\|_X$$

正好分别测量了这两个互补方向。

Remark 2.3. 若 $\ker A$ 是有限维子空间, 有界线性投影 $P: X \rightarrow \ker A$ 总是存在。

如果 $\ker A$ 是有限维空间, 那么除了显式构造投影, 还可以直接选取有限多个连续线性泛函来识别核空间中的不同方向。

Proposition 2.4 (利用有限多个线性泛函构造等价范数). 设 X, Y 是 *Banach* 空间, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\ker A$ 是有限维子空间. 假设商空间估计

$$\inf_{w \in \ker A} \|v - w\|_X \leq C_A \|Av\|_Y, \quad \forall v \in X$$

成立. 设 $f_1, \dots, f_r \in X'$ 是有限多个连续线性泛函, 并且它们在 $\ker A$ 上能够分离点, 即

$$(w \in \ker A, \quad f_j(w) = 0 \quad (j = 1, \dots, r)) \implies w = 0.$$

则

$$\|v\|_{A,f} := \|Av\|_Y + \sum_{j=1}^r |f_j(v)|$$

是 X 上与原范数等价的范数。

Proof. 定义有界线性算子

$$B: X \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad Bv := (f_1(v), \dots, f_r(v)),$$

由假设可知, 限制

$$B|_{\ker A} \rightarrow \mathbb{R}^r$$

是单射. 由于 $\ker A$ 是有限维空间, 存在常数 $C_N > 0$, 使得

$$\|w\|_X \leq C_N \sum_{j=1}^r |\ell_j(w)|, \quad \forall w \in \ker A.$$

因此应用前面的核补偿命题可以完成证明。 $\square$

Remark 2.4. 在有限维空间 $\mathbb{R}^r$ 所有范数等价, 因此也可以将补偿项写成其他形式, 例如

$$\left(\sum_{j=1}^r |f_j(v)|^2 \right)^{1/2}, \quad \max_{1 \leq j \leq r} |f_j(v)|.$$

Remark 2.5. 这里要求使用 r 个标量线性泛函来分离 $\ker A$ 中的点, 显然必须满足维数关系

$$\dim \ker A \leq r.$$

满足命题中条件的一组有界线性泛函总是可以构造出来: 由于 $\ker A$ 有限维, 可以找到一组基的对偶基, 然后利用 Hahn-Banach 定理将其延拓为 X 上的连续线性泛函, 分离性仍然可以保证。

3 一些关于逼近算子的命题

这里为了简化讨论, 只考虑 Hilbert 空间的情况。设 H 为 Hilbert 空间, 记 I 为恒等算子。设 $V \subset H$ 是 H 的闭子空间。对 $u \in H$, 记

$$\text{dist}(u, V) := \inf_{v \in V} \|u - v\|_H,$$

即 V 对 u 的最佳逼近误差。闭性保证 $\text{dist}(u, V) = 0$ 当且仅当 $u \in V$ 。

逼近算子 $\Pi \in \mathcal{L}(H)$ 可以看成恒等算子 I 的近似。若 $\text{Ran}(\Pi) \subset V$, 则 Πu 是 V 中对 u 的一个逼近。若 Π 在 V 上对 I 精确, 则误差算子 $I - \Pi$ 在 V 上为零, 可以据此给出对逼近误差 $(I - \Pi)u$ 的控制。

Proposition 3.1 (逼近算子的拟最佳逼近性质). 设 H 是 Hilbert 空间, 记 I 为恒等算子, 设 $V \subset H$ 是 H 的闭子空间。若 $\Pi \in \mathcal{L}(H)$ 且 $\text{Ran}(\Pi) \subset V$, 并且 Π 在 V 上对 I 精确, 即

$$\Pi v = Iv, \quad \forall v \in V.$$

则对任意 $u \in H$, 有

$$\|(I - \Pi)u\|_H \leq \|I - \Pi\|_{\mathcal{L}(H)} \text{dist}(u, V).$$

Proof. 任取 $v \in V$ 。由于 $\Pi v = v$, 有 $u - \Pi u = (I - \Pi)(u - v)$, 从而

$$\|u - \Pi u\|_H \leq \|I - \Pi\|_{\mathcal{L}(H)} \|u - v\|_H.$$

对 $v \in V$ 取下确界即得结论。 $\square$

Remark 3.1. 若进一步满足 Deny-Lions 型不等式: 即存在常数 $C_D > 0$, 使得

$$\text{dist}(u, V) \leq C_D |u|_H, \quad \forall u \in H,$$

其中 $|\cdot|_H$ 是 H 上的半范数。则对满足命题条件的 Π , 有

$$\|u - \Pi u\|_H \leq C_D \|I - \Pi\|_{\mathcal{L}(H)} |u|_H, \quad \forall u \in H.$$

正交投影是一类特殊的逼近算子, 而且由正交分解可以保证取到最佳逼近。

Theorem 3.2 (正交投影的最佳逼近性质). 设 H 是 Hilbert 空间, $V \subset H$ 是闭子空间, $P_V \in \mathcal{L}(H)$ 是正交投影, 即满足 $\text{Ran}(P_V) = V$ 、 $P_V^2 = P_V$ 以及正交性

$$(u - P_V u, v)_H = 0, \quad \forall u \in H, \forall v \in V.$$

则对任意 $u \in H$, 有

$$\|u - P_V u\|_H = \inf_{v \in V} \|u - v\|_H.$$

Definition 3.1 (广义插值算子). 设 H 是 Hilbert 空间, $V_r \subset H$ 是维数为 N 的有限维空间。设 $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in H'$ 在 V_r 上能够分离点, 即

$$(v_r \in V_r, \quad \lambda_j(v_r) = 0, \quad j = 1, \dots, N) \implies v_r = 0.$$

称

$$\Pi u = \sum_{j=1}^N \lambda_j(u) \phi_j, \quad u \in H,$$

为由自由度 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ 定义的广义插值算子。其中 $\{\phi_j\}_{j=1}^N \subset V_r$ 是唯一满足 $\lambda_i(\phi_j) = \delta_{ij}$ 的一组基。

Remark 3.2. 由上述表示可知, Π 是有界线性算子。易得 $\Pi^2 = \Pi$, 因此 Π 是一个投影算子。

Proposition 3.3 (广义插值算子的误差估计). 设 H 是 Hilbert 空间, $V_r \subset H$ 是维数为 N 的有限维空间, $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in H'$ 在 V_r 上能够分离点, 并设 $\Pi: H \rightarrow V_r$ 是相应的广义插值算子。则

$$\|u - \Pi u\|_H \leq \|I - \Pi\|_{\mathcal{L}(H)} \text{dist}(u, V_r), \quad \forall u \in H.$$

Proof. 有限和表示可以保证 Π 的有界性

$$\|\Pi u\|_H \leq \sum_{j=1}^N \|\lambda_j\|_{H'} \|\phi_j\|_H \|u\|_H,$$

因而 $\Pi \in \mathcal{L}(H)$ 。对 $v_r \in V_r$, 易知 Π 在 V_r 上是精确的, 应用逼近算子的拟最佳逼近性质即得误差估计。□

Remark 3.3. 广义插值算子的定义可以把很多插值或投影算子都统一起来, 只需要确定有限维空间 V_r 并分配对应的自由度即可。通常 V_r 都取为有限维的低次多项式空间, 对于自由度的选取则可以从插值条件 (点值泛函) 和矩条件中自由搭配:

1. 全部选取点值泛函就可以得到 Lagrange 插值算子;
2. 点值泛函加上一些导数值泛函就可以得到 Hermite 插值算子;
3. 全部选取由内积诱导的矩条件 $\lambda_j(u) = (u, v_j)_H$, 其中 $\{v_j\}_{j=1}^N$ 是 V_r 的一组基, 可以得到 H -正交投影算子; 一般矩条件则可能得到斜投影;
4. 在一维 $\mathbb{P}_r$ 上, 取对 $\mathbb{P}_{r-1}$ 精确的矩条件, 再加上一个端点的点泛函, 可以得到 Gauss-Radau 型投影算子;

5. 在一维 $\mathbb{P}_r$ 上, 取对 $\mathbb{P}_{r-2}$ 精确的矩条件, 再加上两个端点的点泛函, 可以得到 Gauss-Lobatto 型投影算子;

上述命题直接给出的是所选 Hilbert 空间范数下的误差, 因此给出的是插值的积分形式误差估计, 而数值分析中更常见的是逐点误差上界。

类似地, 可以用泛函 $g \in H'$ 逼近给定的泛函 $f \in H'$ 。若 g 在闭子空间 V 上对 f 精确, 则泛函误差 $f - g$ 在 V 上为零, 据此可以给出泛函的逼近误差。

Proposition 3.4 (泛函逼近误差估计). 设 H 是 Hilbert 空间, $V \subset H$ 是闭子空间, $f, g \in H'$ 。若 g 在 V 上对 f 精确, 即

$$g(v) = f(v), \quad \forall v \in V,$$

则对任意 $u \in H$, 有

$$|f(u) - g(u)| \leq \|f - g\|_{H'} \text{dist}(u, V).$$

Proof. 任取 $v \in V$ 。由于 $(f - g)(v) = 0$, 有

$$|f(u) - g(u)| = |(f - g)(u - v)| \leq \|f - g\|_{H'} \|u - v\|_H.$$

对 $v \in V$ 取下确界即得结论。 $\square$

Remark 3.4. 数值积分泛函就是一个最常见的例子, 作为对精确积分泛函的近似, 保证数值积分在低次多项式空间中精确成立, 就可以用上述命题给出数值积分的误差估计。

第二部分

4 Sobolev 空间中的范数等价命题

记 Ω 为区域, 即非空连通开集。对于 $m \geq 0$, 记 $\mathbb{P}_m(\Omega)$ 是区域 Ω 上次数不超过 m 的多项式集合, 并约定 $\mathbb{P}_{-1}(\Omega) = \{0\}$ 。我们还要使用记号 $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$, $|u|_{H^0(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)}$ 。下面的讨论通常都假定讨论的区域边界性质足够好, 例如是凸的, 有界, 边界是 Lipschitz 的, 内部非空等。我们主要关注 $H^m(\Omega)$ 空间, 当然很多结论都可以直接推广到 $W^{m,p}(\Omega)$, 只是记号更加繁琐。

首先回顾 $H^m(\Omega)$ 的半范数和范数。对于多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$, 记 $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, 并用 $D^\alpha v$ 表示 v 的相应弱导数。定义

$$H^m(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}.$$

其半范数和范数分别为

$$|v|_{H^m(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=0}^m |v|_{H^k(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemma 4.1. 设 $u \in H^m(\Omega)$, 若 $|u|_{H^m(\Omega)} = 0$, 则 u 几乎处处等于一个次数不超过 $m-1$ 的多项式 $p \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega)$ 。

📌 **Note.** 更常见的情形是：对于 $m=0$, $\|u\|_{L^2} = 0$, 那么 u 几乎处处为零；对于 $m=1$, $|u|_{H^1} = 0$, 那么 u 几乎处处为常值。这个引理是上述结论的推广。 ◇

Lemma 4.2. 设 Ω 为具有 Lipschitz 边界的有界区域, $m \geq 1$ 。设 $f_1, \dots, f_r$ 是空间 $H^m(\Omega)$ 上的有限多个连续线性泛函, 并且它们在 $\mathbb{P}_{m-1}(\Omega)$ 上能够分离点,

$$(p \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega), f_i(p) = 0, \forall i = 1, \dots, r) \Rightarrow p = 0$$

那么在空间 $H^m(\Omega)$ 中可以定义新的范数 $\|\cdot\|_*$

$$\|u\|_* = \left(|u|_{H^m(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^r |f_i(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

并且范数 $\|\cdot\|_*$ 与 $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$ 等价。

Proof. 记 $N_m = \dim \mathbb{P}_{m-1}(\Omega)$, 下面逐个匹配 Peetre–Tartar 引理需要的记号和条件。记空间

$$X = H^m(\Omega), \quad Y = (L^2(\Omega))^{N_{m+1}-N_m}, \quad Z = H^{m-1}(\Omega).$$

定义线性算子 $A: X \rightarrow Y$ 如下

$$A: X \ni v \mapsto ((D^\alpha v)_{|\alpha|=m}) \in Y$$

也就是说 A 提取了最高阶导数信息, 并且可以赋予范数

$$\|Av\|_Y := \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |v|_{H^m(\Omega)}$$

也就是 H^m 半范数。显然 A 是有界的, 并且

$$\ker A = \mathbb{P}_{m-1}(\Omega).$$

定义线性算子 $T: X \rightarrow Z$ 为恒等算子, 由 Rellich–Kondrachov 紧嵌入定理

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow H^{m-1}(\Omega)$$

保证 T 是一个紧算子。Peetre–Tartar 引理需要的不等式条件也是显然的, 直接由定义就可以保证

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} \leq C_0 (|v|_{H^m(\Omega)} + \|v\|_{H^{m-1}(\Omega)})$$

因此可以应用 Peetre–Tartar 引理得到商空间估计：存在常数 $C > 0$, 使得

$$\inf_{w \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega)} \|v - w\|_{H^m(\Omega)} \leq C |v|_{H^m(\Omega)}, \quad \forall v \in X.$$

继续利用后续的命题就可以完成范数等价性证明。 □

Remark 4.1. 这里需要对区域边界有一些假设, 是因为它用到了 Rellich–Kondrachov 紧嵌入定理。紧嵌入的成立依赖于区域边界的正则性 (Lipschitz 连续), 且本质上是非构造性的证明 (存在性证明)。如果区域带有尖刺或裂缝, 可能会失效。

Example 4.1. 对于 $m = 1$, 取 f_1 为 $f_1(v) = \int_{\Omega} v$, 基于上述引理可以得到 $H^1(\Omega)$ 的 Poincare 不等式

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(|u|_{H^1(\Omega)}^2 + \left| \int_{\Omega} u \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Example 4.2. 对于 $m = 1$, 取 f_1 为 $f_1(v) = \int_{\partial\Omega} v$, 基于上述引理可以得到 $H^1(\Omega)$ 的 Friedrichs 不等式

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(|u|_{H^1(\Omega)}^2 + \left| \int_{\partial\Omega} u \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

5 Deny-Lions 引理

Deny-Lions 引理刻画了用多项式逼近 $H^m(\Omega)$ 中的元素时的最优范数误差。

Lemma 5.1 (Deny-Lions). 设 Ω 为具有 Lipschitz 边界的有界区域, 对任意 $m \geq 1$, 存在常数 $C = C(m, \Omega) > 0$ 使得

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega)} \|v - p\|_{H^m(\Omega)} \leq C |v|_{H^m(\Omega)}, \quad \forall v \in H^m(\Omega).$$

Proof. 记 $N = \dim(\mathbb{P}_{m-1}(\Omega))$, 取 $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ 为 $\mathbb{P}_{m-1}(\Omega)$ 的一组基, 并在 $(\mathbb{P}_{m-1}(\Omega))'$ 中取其共轭基 $\{f_i\}_{i=1}^N$, 即

$$f_i(\phi_j) = \delta_{ij}.$$

由 Hahn-Banach 延拓定理, 可以将每个 f_i 延拓为 $H^m(\Omega)$ 上的连续线性泛函。由前面的范数等价定理, 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\|w\|_{H^m(\Omega)} \leq C \left(|w|_{H^m(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N |f_i(w)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall w \in H^m(\Omega).$$

对于给定的 $v \in H^m(\Omega)$, 取

$$p_v = \sum_{j=1}^N f_j(v) \phi_j \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega).$$

于是

$$f_i(v - p_v) = f_i(v) - \sum_{j=1}^N f_j(v) f_i(\phi_j) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

因为 $|p_v|_{H^m(\Omega)} = 0$, 得到

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega)} \|v - p\|_{H^m(\Omega)} \leq \|v - p_v\|_{H^m(\Omega)} \leq C |v - p_v|_{H^m(\Omega)} = C |v|_{H^m(\Omega)}.$$

□

Remark 5.1. 前面的范数等价定理已经几乎给出了所需的最优误差估计, 但是保留了泛函选取的自由度, 将其放在了条件之中。这里对 Deny-Lions 引理的证明只是加上了约束 $\mathbf{P}_{m-1}(\Omega)$ 的有界线性泛函的存在性说明。

Remark 5.2. 在证明中虽然构造了 p_v ，但是依赖于泛函的延拓，因此给出的仍然是存在性证明。Dupont 和 Scott 给出了一套基于泰勒多项式平均的构造性证明，但是需要对区域的几何形状有一些额外假设。

6 Bramble–Hilbert 引理

Bramble–Hilbert 引理是 Deny–Lions 引理的一个直接推论，但是有很多不同的形式。下面首先给出 Bramble 和 Hilbert 在原始论文中给出的形式，也是最抽象的版本。

Lemma 6.1 (Bramble–Hilbert, 等价范数形式). 设 Ω 为具有 *Lipschitz* 边界的有界区域, 对任意 $m \geq 1$, 在商空间 $H^m(\Omega)/\mathbb{P}_{m-1}(\Omega)$ 中, 范数 $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)/\mathbb{P}_{m-1}(\Omega)}$ 与半范数 $|\cdot|_{H^m(\Omega)}$ (可以作为商空间的范数) 等价。

Proof. 一个方向是显然的

$$|v|_{H^m(\Omega)} = |v - p|_{H^m(\Omega)} \leq \|v - p\|_{H^m(\Omega)}, \quad \forall p \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega).$$

遍历 p 取下确界即可。另一个方向由 Deny–Lions 引理保证

$$\|\hat{v}\|_{H^m(\Omega)/\mathbb{P}_{m-1}(\Omega)} = \inf_{p \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega)} \|v - p\|_{H^m(\Omega)} \leq C|v|_{H^m(\Omega)},$$

□

Remark 6.1. 也可以从前面的纯泛函版本的商空间范数等价命题进行证明，思路更加自然。

Lemma 6.2 (Bramble–Hilbert, 算子形式). 设 Ω 为具有 *Lipschitz* 边界的有界区域, $m \geq 1$, 记 $X = H^m(\Omega)$, 设 Y 是任一 *Banach* 空间, $F \in \mathcal{L}(X, Y)$, 满足

$$F(p) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega).$$

则存在常数 $C = C(m, \Omega)$ 使得

$$\|F(v)\|_Y \leq C\|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)}|v|_{H^m(\Omega)}, \quad \forall v \in H^m(\Omega).$$

Proof. 对于任意 $v \in H^m(\Omega)$ 以及 $p \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega)$, 利用 $F(v) = F(v - p)$ 可得

$$\|F(v)\|_Y = \|F(v - p)\|_Y \leq \|F\|_{\mathcal{L}(X, Y)}\|v - p\|_{H^m(\Omega)}$$

变化 p 使得右侧取到 $\inf$, 然后利用 Deny–Lions 引理即可完成证明。□

上面给出的是最一般的算子形式，实践中更常见的如下两种情况

1. 取 $Y = X$, $F = I - \Pi$, 其中 Π 是一个插值或投影算子, 因此 F 是插值或投影对应的误差算子;
2. 取 $Y = \mathbb{R}$, $F \in X'$, 即 F 是一个有界线性泛函。

其中误差算子形式的 Bramble–Hilbert 引理是有限元误差分析中最常用的版本。

Lemma 6.3 (Bramble–Hilbert, 误差算子形式). 设 Ω 为具有 *Lipschitz* 边界的有界区域, $m \geq 1$, 记 $X = Y = H^m(\Omega)$, 算子 $\Pi \in \mathcal{L}(X, Y)$ 作为恒等算子 I 的近似, 满足

$$\Pi p = p, \quad \forall p \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega).$$

则存在常数 $C = C(m, \Omega)$ 使得

$$\|v - \Pi v\|_{H^m(\Omega)} \leq C \|I - \Pi\|_{\mathcal{L}(X, Y)} |v|_{H^m(\Omega)}, \quad \forall v \in H^m(\Omega).$$

Lemma 6.4 (Bramble–Hilbert, 泛函形式). 设 Ω 为具有 *Lipschitz* 边界的有界区域, $m \geq 1$, 记 $X = H^m(\Omega)$, $f \in X'$, 满足

$$f(p) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega).$$

则存在常数 $C = C(m, \Omega)$ 使得

$$|f(v)| \leq C \|f\|_{X'} |v|_{H^m(\Omega)}, \quad \forall v \in H^m(\Omega).$$

第三部分

现在我们将前文中的结论应用到有限元理论的插值误差估计。在有限元理论中, 通过变分形式通常可以得到如下形式的误差估计

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

即精确解和数值解之间的误差可以被有限元空间对精确解的最佳逼近误差控制, 但是这样的结果还是不够, 我们需要知道这个最佳逼近误差到底有多小, 例如随着网格尺度 h 趋于 0, 这个误差会以何种量级收敛到 0? 为了达到这个目的, 通常需要借助 Deny–Lions 引理和 Bramble–Hilbert 引理。

7 有限元空间

Definition 7.1 (有限元). 称三元组 $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ 为有限元, 如果满足如下条件:

1. $K \subset \mathbb{R}^d$ 是具有分片光滑边界的闭区域, 称为单元;
2. $\mathcal{P}$ 是 K 上的有限维函数空间, $n = \dim(\mathcal{P})$, $\mathcal{P}$ 中的元素称为空间函数;
3. $\mathcal{N} = \{N_1, \dots, N_n\}$ 是对偶空间 $\mathcal{P}'$ 的一组基, 称为节点变量或自由度。

Definition 7.2 (节点基). 设 $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ 是一个有限元, 设 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 是 $\mathcal{P}$ 的一组基函数, 并且与 $\mathcal{N}$ 对偶, 即满足 $N_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$, 则称 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 为 $\mathcal{P}$ 的节点基。

对于 $v \in \mathcal{P}$, 可以通过节点基展开

$$v = \sum_{i=1}^n N_i(v) \varphi_i \in \mathcal{P}.$$

因此对 $v \in \mathcal{P}$ 的存储和表示可以转换为对系数组 $\{N_i(v)\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ 的存储和表示。

Example 7.1 (Lagrange 线性元). 设 $K \subset \mathbb{R}^2$ 为三角形, 顶点为 A_i ($i = 1, 2, 3$)。令 $\mathcal{P} = \mathbb{P}_1(K)$, $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, N_3\}$, 其中 $N_i \in \mathcal{P}'$ 定义为

$$N_i(v) = v(A_i), \quad \forall v \in \mathcal{P}.$$

此时 $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ 称为 Lagrange 线性元。

Theorem 7.1. 对于有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, 设 $\mathcal{M}_h = \{K_j\}_{j=1}^J$ 是 Ω 的一个单元剖分, 并且 ∂K_j 都是 Lipschitz 连续的, 那么: 对于 $k \geq 1$, 若函数 v 在每个单元都是 C^k 的, 即

$$v|_{K_j} \in C^k(K_j), \quad \forall j = 1, \dots, J.$$

则:

$$v \in H^k(\Omega) \iff v \in C^{k-1}(\Omega).$$

 **Note.** 这说明如果函数在每一个单元内是 C^k 连续的, 那么只需要保证各个单元边界的 $k-1$ 阶连续性, 就可以保证整体属于 H^k 。 

Example 7.2. 设 $\mathcal{M}_h$ 是区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 的一个三角剖分, 设 $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ 为 Lagrange 线性元, 引入

$$V_h = \{v_h \mid v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K), \quad \forall K \in \mathcal{M}_h, v_h \text{ 在单元顶点连续}\}$$

那么 $V_h \subset H^1(\Omega)$ 是一个 H^1 协调有限元空间。

8 有限元插值

Definition 8.1. 给定有限元 $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$, 设 $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{P}$ 为 $\mathcal{P}$ 的节点基, 定义局部有限元插值 I_K 为

$$I_K(v) := \sum_{i=1}^n N_i(v) \varphi_i \in \mathcal{P}$$

Remark. 显然为 I_K 线性算子, 并且定义域可以取为所有 N_i 定义域的交集。对于 $p \in \mathcal{P}$, 显然有 $I_K(p) = p$ 。

Example 8.1. 设 $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ 为线性有限元, 其节点基为 $\{\lambda_i, i = 1, \dots, d+1\}$, 则 Lagrange 插值定义为

$$I_K(v) = \sum_{i=1}^{d+1} v(x_i) \lambda_i, \quad \forall v \in C(K).$$

其中 $\{x_i\}$ 是 $K \subset \mathbb{R}^d$ 的 $d+1$ 个顶点, $N_i(v) = v(x_i)$ 。

Definition 8.2. 设 $\mathcal{M}_h$ 是区域 Ω 的一个网格剖分。对于任意单元 $K \in \mathcal{M}_h$, 给定有限元 $(K, \mathcal{P}_K, \mathcal{N}_K)$, 则有限元插值算子 I_h 定义为

$$(I_h(v))|_K := I_K(v|_K), \quad \forall K \in \mathcal{M}_h.$$

9 有限元的仿射等价

参考单元上的局部插值误差已经由 Bramble–Hilbert 引理得到。下面整理仿射变换下 Sobolev 半范数、单元几何量和局部插值算子的对应关系, 为物理单元上的估计恢复尺度因子。

Definition 9.1. 称两个单元 $K, \hat{K} \subset \mathbb{R}^d$ 是仿射等价的, 如果存在可逆的线性变换:

$$F: \hat{K} \rightarrow K, \quad F(\hat{x}) = B\hat{x} + b.$$

对于仿射等价的两个单元 $K, \hat{K}$, 考虑任意一个定义在 K 上的函数 $v(x)$, 可以通过仿射变换将其定义到 $\hat{K}$ 上

$$\hat{v} := v \circ F, \quad \hat{v}(\hat{x}) := v(F(\hat{x})).$$

Lemma 9.1. 设两个单元 $K, \hat{K} \subset \mathbb{R}^d$ 是仿射等价的, 那么, 对于任意 $v \in H^m(K)$, 都有 $\hat{v} \in H^m(\hat{K})$, 并且存在常数 $C = d^{m/2}$ 使得

$$\begin{aligned} |\hat{v}|_{H^m(\hat{K})} &\leq C \|B\|^m |\det(B)|^{-\frac{1}{2}} |v|_{H^m(K)}, \quad \forall v \in H^m(K) \\ |v|_{H^m(K)} &\leq C \|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{\frac{1}{2}} |\hat{v}|_{H^m(\hat{K})}, \quad \forall \hat{v} \in H^m(\hat{K}). \end{aligned}$$

其中的 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^d$ 在 L^2 范数意义下诱导的算子范数。

Lemma 9.2. 设两个单元 $K, \hat{K} \subset \mathbb{R}^d$ 是仿射等价的, 记两个单元的直径为: $h_K = \text{diam}(K)$, $h_{\hat{K}} = \text{diam}(\hat{K})$, 记两个单元的内接球直径为: ρ_K 和 $\rho_{\hat{K}}$, 那么存在如下关系

$$\|B\| \leq \frac{h_K}{\rho_{\hat{K}}}, \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{h_{\hat{K}}}{\rho_K}, \quad |\det(B)| = \frac{|K|}{|\hat{K}|}, \quad |\det(B^{-1})| = \frac{|\hat{K}|}{|K|}.$$

Definition 9.2. 设 $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ 和 $(\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{N}})$ 是两个有限元, $x = F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$ 是一个可逆的仿射变换, 记 $v(x) = \hat{v}(\hat{x})$, 称这两个有限元是仿射等价的, 如果满足

1. $K = F(\hat{K})$;
2. $\mathcal{P} = \{p \mid \hat{p} \in \hat{\mathcal{P}}\}$;
3. $\widehat{I_K v} = I_{\hat{K}} \hat{v}$ 。

Remark. 这就是要求两个有限元在一个确定的仿射变换下是完全对应的, 无论是单元, 还是空间函数, 还是自由度。

10 有限元插值误差

Theorem 10.1. 设有限元 $(\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{N}})$ 满足

1. $\mathbb{P}_{m-1}(\hat{K}) \subset \hat{\mathcal{P}} \subset H^m(\hat{K})$;
2. $\hat{\mathcal{N}} \subset (C^\ell(\hat{K}))'$;
3. $m - \frac{d}{2} > \ell \geq 0$;

记 $I_{\hat{K}}$ 为局部有限元插值算子, 则存在常数 $C = C(d, m, \hat{K}) > 0$, 使得

$$|\hat{v} - I_{\hat{K}}(\hat{v})|_{H^i(\hat{K})} \leq C |\hat{v}|_{H^m(\hat{K})}, \quad \forall \hat{v} \in H^m(\hat{K}), \quad i = 0, \dots, m$$

Proof. 第三个条件 $m - \frac{d}{2} > \ell \geq 0$ 保证了嵌入关系

$$H^m(\hat{K}) \hookrightarrow C^\ell(\hat{K})$$

再加上第二个条件 $\hat{\mathcal{N}} \subset (C^\ell(\hat{K}))'$ 可以保证: $\hat{N}_i \in \hat{\mathcal{N}}$ 在 $H^m(\hat{K})$ 有定义, 从而保证局部插值算子 $I_{\hat{K}}$ 有定义。进而通过第一个条件可知: $I_{\hat{K}}$ 可以定义在 $H^m(\hat{K})$, 并且对 $\mathbb{P}_{m-1}(\hat{K})$ 保持不变。可以证明: 对于 $i = 0, \dots, m$, $I_{\hat{K}} \in \mathcal{L}(H^m(\hat{K}), H^i(\hat{K}))$ 。

$$\|I_{\hat{K}}(\hat{v})\|_{H^i} = \left\| \sum_{j=1}^n \hat{N}_j(\hat{v}) \hat{\varphi}_j \right\|_{H^i} \leq \sum_{j=1}^n |\hat{N}_j(\hat{v})| \|\hat{\varphi}_j\|_{H^i} \leq \sum_{j=1}^n \|\hat{N}_j\|_{C^\ell} \|\hat{\varphi}_j\|_{H^m} \|\hat{v}\|_{C^\ell} \leq C \|\hat{v}\|_{C^\ell} \leq C \|\hat{v}\|_{H^m}$$

利用前面的 Bramble–Hilbert 引理, 取 $f = I - I_{\hat{K}}$ 即可完成证明。 $\square$

 **Note.** 定理的要求有点多, 但其实只是为了保证不等式两侧的所有符号都有意义。 $\diamond$

任意有限元的误差估计都可以根据仿射等价关系, 将其转换到参考有限元上进行分析。

Theorem 10.2. 设参考有限元 $(\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{N}})$ 满足定理 10.1 的所有条件, $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ 仿射等价于 $(\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{N}})$, 则存在 $C = C(d, m, \hat{K}, h_K/\rho_K)$, 使得

$$|v - I_K(v)|_{H^i(K)} \leq C h_K^{m-i} |v|_{H^m(K)}, \quad \forall v \in H^m(K), \quad i = 0, \dots, m$$

Proof.

$$\begin{aligned} |v - I_K(v)|_{H^i(K)} &\leq C \|B^{-1}\|^i |\det(B)|^{\frac{1}{2}} |\widehat{v - I_{\hat{K}}(\hat{v})}|_{H^i(\hat{K})} \\ &= C \|B^{-1}\|^i |\det(B)|^{\frac{1}{2}} |\hat{v} - \hat{I}_{\hat{K}}(\hat{v})|_{H^i(\hat{K})} \\ &\leq C \|B^{-1}\|^i |\det(B)|^{\frac{1}{2}} |\hat{v}|_{H^m(\hat{K})} \\ &\leq C \|B^{-1}\|^i \|B\|^m |v|_{H^m(K)} \\ &\leq C \left(\frac{h_{\hat{K}}}{\rho_K} \right)^i \left(\frac{h_K}{\rho_{\hat{K}}} \right)^m |v|_{H^m(K)} \\ &\leq C \frac{h_{\hat{K}}^i}{\rho_{\hat{K}}^m} \left(\frac{h_K}{\rho_K} \right)^i h_K^{m-i} |v|_{H^m(K)}. \end{aligned}$$

$\square$

为了从单个有限元上的误差估计组合得到全局的误差估计，需要对网格剖分进行一些限制，要求网格剖分的质量不要太差。

Definition 10.1. 对于一族网格剖分 $\{\mathcal{M}_h, h > 0\}$ ，称其为正则的 (regular)，如果满足：存在常数 $\mu > 0$ ，使得

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \mu, \quad \forall K \in \mathcal{M}_h.$$

称其为拟均匀的 (quasi-uniform)，如果满足：存在常数 $\nu > 0$ ，使得

$$\frac{h}{h_K} \leq \nu, \quad \forall K \in \mathcal{M}_h.$$

其中 $h := \max_{K \in \mathcal{M}_h} h_K$ 。

Remark. 正则性保证网格中不存在特别细长的单元；拟均匀性保证网格中的所有单元尺寸差不多。

假定网格剖分是正则的，将所有的有限元都根据仿射等价关系转换到参考有限元上并求和，就可以得到全局有限元插值算子 I_h 的误差估计。

Theorem 10.3. 假设 $\{\mathcal{M}_h\}$ 是多边形 (多面体) 区域 $\Omega \in \mathbb{R}^d$ 的一族正则剖分，设 $(\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{N}})$ 是一个参考有限元，并且对某个 ℓ 和 m 满足定理 10.1 的条件。对每一个单元 $K \in \mathcal{M}_h$ ，假设有有限元 $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ 仿射等价于 $(\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{N}})$ ，则存在常数 $C = C(d, m, \hat{K}, \mu) > 0$ ，使得

$$\|v - I_h v\|_{H^i(\mathcal{M}_h)} \leq C h^{m-i} |v|_{H^m(\Omega)}, \quad \forall v \in H^m(\Omega), \quad i = 0, \dots, m$$

其中 $h = \max_{K \in \mathcal{M}_h} h_K$ 以及

$$\|\cdot\|_{H^i(\mathcal{M}_h)} := \left(\sum_{K \in \mathcal{M}_h} \|\cdot\|_{H^i(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Remark 10.1. 通过变分形式我们已经得到了如下的估计

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

为了得到

$$\|u - u_h\| \leq C h^k$$

看起来我们可以直接利用 Deny–Lions 引理结合尺度变化实现，即

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \leq C \inf_{v_h \in P_{m-1}} \|u - v_h\| \leq C h^k.$$

但是这里需要考虑多项式空间和 V_h 的大小关系。如果只在一个单元上分析，显然有限元空间保证包含一个低次多项式空间，因此上述过程没有问题。但是我们要的是全局的误差估计，而不是单个单元的，此时 Deny–Lions 引理会对每一个单元分别取 $\inf$ ，我们实际需要保证分片多项式空间也被有限元空间包含，才能进行上述放缩过程。这个要求对于经典的连续有限元是无法满足的，有限元空间会要求单元之间具有一定的关联和连续性，但是对于间断有限元是可以的。因此，间断有限元的误差估计可以直接使用 Deny–Lions 引理获得，但是经典的连续有限元必须借助一个全局定义的有限元插值算子来完成误差估计，而对于这个插值算子的误差估计就要依靠 Bramble–Hilbert 引理。

11 逆不等式和迹不等式

为了简化描述, 下面只考虑单个有限元上的局部逆不等式和迹不等式, 对有限元求和即可得到整体版的不等式。需要注意的是, 如果需要得到全局的逆不等式, 还需要假定网格剖分具有拟均匀性。

通常情况下, 我们只能希望用高阶模控制低阶模, 但是对于有限元空间, 基于有限维空间的范数等价性, 可以反过来使用低阶模控制高阶模。

Theorem 11.1 (逆不等式). 设有限元 $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$, 单元 K 仿射等价于参考单元 $\hat{K}$, 对 $m \geq \ell \geq 0$ 有

$$|v|_{H^m(K)} \leq Ch_K^{\ell-m} |v|_{H^\ell(K)}, \quad \forall v \in \mathcal{P}.$$

其中常数 C 依赖于 $\dim(\mathcal{P}), d, m, \hat{K}$ 以及 K 的正则性。

Example 11.1 (一维区间上的逆不等式). 取 $K = (0, h)$ 、 $\mathcal{P} = \mathbb{P}_2(K)$, 并令 $m = 2$ 。分别取 $\ell = 0$ 和 $\ell = 1$, 此时的逆不等式包括

$$\begin{aligned} \|v''\|_{L^2(0,h)} &\leq Ch^{-2} \|v\|_{L^2(0,h)}, \\ \|v''\|_{L^2(0,h)} &\leq Ch^{-1} \|v'\|_{L^2(0,h)}, \end{aligned}$$

其中 $v \in \mathbb{P}_2(0, h)$, 常数 C 与 h 无关。

下面用一个具体的例子进行展示: 取 $v(x) = x^2$, 计算易得

$$|v|_{H^2(0,h)} = \|v''\|_{L^2(0,h)} = 2h^{\frac{1}{2}}, \quad |v|_{H^1(0,h)} = \|v'\|_{L^2(0,h)} = \frac{2h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}, \quad \|v\|_{L^2(0,h)} = \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5}}.$$

量级关系与逆不等式相符。

Corollary 11.2. 假设 $\{\mathcal{M}_h\}$ 是多边形 (多面体) 区域 $\Omega \in \mathbb{R}^d$ 的一族正则拟均匀三角剖分。设 $\hat{K}$ 是一个参考单元, 且每一个单元 $K \in \mathcal{M}_h$ 都仿射等价于 $\hat{K}$ 。设 X_h 是 $\mathcal{M}_h$ 上的次数 $\leq p$ 的分片多项式空间, 则存在常数 $C = C(p, \mu, \nu, d, m)$ 使得: 对于 $m \geq \ell \geq 0$ 以及 $v_h \in X_h$,

$$|v_h|_{H^m(\mathcal{M}_h)} \leq Ch^{\ell-m} |v_h|_{H^\ell(\mathcal{M}_h)}.$$

迹不等式讨论的是如何用单元内部的范数控制函数在单元边界上的取值。仅用 $L^2(K)$ 范数无法控制一般 $H^1(K)$ 函数的边界迹, 因此估计中还需要梯度项。又因为 $K \subset \mathbb{R}^d$, 而 ∂K 是 $d-1$ 维的, 体积分与边界积分的尺度相差一阶, 对应到 L^2 范数中便出现半阶尺度因子。

Theorem 11.3 (迹不等式). 设 $K \subset \mathbb{R}^d$ 是直径为 h_K 的多面体单元, 仿射等价于参考单元 $\hat{K}$, 则下面的迹不等式成立:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(\partial K)} &\leq C \left(h_K^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(K)} + \|v\|_{L^2(K)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L^2(K)}^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq C \left(h_K^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(K)} + h_K^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L^2(K)} \right). \quad \forall v \in H^1(K). \end{aligned}$$

其中常数 $C > 0$ 依赖于单元 K 的正则性和 $\hat{K}$ 。

Corollary 11.4 (离散迹不等式). 在上述定理的假设下, 进一步设 $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ 是仿射等价于固定参考有限元的有限元, 且 $\mathcal{P} \subset H^1(K)$ 。则

$$\|v\|_{L^2(\partial K)} \leq Ch_K^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(K)}, \quad \forall v \in \mathcal{P},$$

其中常数 C 与 h_K 无关。

Proof. 对 $v \in \mathcal{P}$ 的梯度项应用逆不等式, 得到

$$\|\nabla v\|_{L^2(K)} \leq Ch_K^{-1} \|v\|_{L^2(K)}.$$

将其代入迹不等式, 此时梯度项可以并入第一项, 得证。 $\square$

Example 11.2 (一维区间上的迹不等式). 取 $K = (0, h)$, 其边界只有两个端点。约定

$$\|v\|_{L^2(\partial K)} := (|v(0)|^2 + |v(h)|^2)^{\frac{1}{2}},$$

此时的迹不等式包括

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(\partial K)} &\leq C \left(h^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(0,h)} + \|v\|_{L^2(0,h)}^{\frac{1}{2}} \|v'\|_{L^2(0,h)}^{\frac{1}{2}} \right), \\ \|v\|_{L^2(\partial K)} &\leq C \left(h^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(0,h)} + h^{\frac{1}{2}} \|v'\|_{L^2(0,h)} \right), \end{aligned}$$

其中 $v \in H^1(0, h)$, 常数 C 与 h 无关。若进一步限制 $v \in \mathbb{P}_2(0, h)$, 离散迹不等式给出

$$\|v\|_{L^2(\partial K)} \leq Ch^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(0,h)}.$$

下面用一个具体的例子进行展示: 取 $v(x) = x^2$, 计算易得

$$\|v\|_{L^2(\partial K)} = h^2, \quad \|v\|_{L^2(0,h)} = \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5}}, \quad \|v'\|_{L^2(0,h)} = \frac{2h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}.$$

代入上面的两个不等式后, 右端各项均为 h^2 量级, 与左端相符。